**MA1101:** Introducción al Álgebra

# Pauta Tarea 5

**Se entregan la P1d, la P2b y la P3a.**

**P1.** Determine inyectividad, epiyectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

*a)* $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$, $n \longmapsto \frac{1}{2n}$

*b)* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (x - y, x + y)$

*c)* $h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x+2}{x-2}$

*d)* $j : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A \longmapsto A \cap \mathbb{N}$

*Respuesta:*

*La función no es inyectiva, porque $\emptyset \neq \{\frac{1}{2}\}$ y $j(\emptyset) = \emptyset = j(\{\frac{1}{2}\})$. (Se puede demostrar usando otros conjuntos, por ejemplo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$.)*

*Como no es inyectiva, la función tampoco es biyectiva.*

*La función es epiyectiva, porque dado un subconjunto arbitrario $A$ de $\mathbb{N}$, podemos considerar el mismo $A$ como subconjunto de $\mathbb{R}$, y tenemos $j(A) = A \cap A = A$, que es lo que se necesitaba. (En vez de considerar $A \subseteq \mathbb{R}$, se puede usar algo como $A \cup \{\frac{1}{2}\}$, o algo así.)*

*e)* $k : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $x \longmapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$

**P2.** Sea $A$ un conjunto con al menos dos elementos.

*a)* Sean $f : A \to B$, $g, h : B \to A$ tales que $g \circ f = id_A$ y $f \circ h = id_B$.
Demuestre que $f$ es biyectiva y que $g = h = f^{-1}$.

*b)* Sean $f : A \times A \to A$, $(x, y) \longmapsto f(x, y) = x$ y $g : A \to A \times A$, $x \longmapsto g(x) = (x, x)$.
Determine si $f \circ g = id_A$ y $g \circ f = id_{A\times A}$.

*Respuesta:*

*Se tiene que $f \circ g : A \to A$, y para todo $x \in A$, tenemos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x, x)) = x$. Por lo tanto, $f \circ g = id_A$.*

*Aunque $g \circ f : A \times A \to A \times A$, no es igual a $id_{A\times A}$, porque si tomamos $x, x' \in A$ con $x \neq x'$ (existen porque $A$ tiene al menos dos elementos), entonces $(g \circ f)(x, x') = g(f(x, x')) = g(x) = (x, x) \neq (x, x')$.*

**P3.** Sea $\mathcal{F} = \{f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \mid f \text{ es función}\}$ y $\mathcal{B} = \{f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \mid f \text{ es función biyectiva}\}$. Se definen además las siguientes funciones:

$$\Psi : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1],\ f \longmapsto \Psi(f) = \frac{f(0) + f(1)}{2},$$

$$\mathcal{I} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B},\ f \longmapsto \mathcal{I}(f) = f^{-1}.$$

*a)* Estudie inyectividad y epiyectividad de ambas funciones.

*Respuesta:*

*Para $i \in [0, 1]$, sea $c_i : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ la función constante en $i$, es decir $c_i(x) = i$ para todo $x \in [0, 1]$, y sea $id_{[0,1]}$ la identidad en $[0, 1]$. Notamos que $c_i, id_{[0,1]} \in \mathcal{F}$.*

- *La función $\Psi$ no es inyectiva, porque $c_{\frac{1}{2}} \neq id_{[0,1]}$ y*
  $\Psi(c_{\frac{1}{2}}) = \frac{c_{\frac{1}{2}}(0)+c_{\frac{1}{2}}(1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{id_{[0,1]}(0)+id_{[0,1]}(1)}{2} = \Psi(id_{[0,1]})$.
- *La función $\Psi$ es epiyectiva, porque dado $x \in [0, 1]$ arbitrario, podemos considerar $c_x$, y tenemos*
  $\Psi(c_x) = \frac{c_x(0)+c_x(1)}{2} = \frac{x+x}{2} = x$*, que es lo que se necesitaba.*

- *La función $\mathcal{I}$ es inyectiva. Para ver esto, consideramos $f, g \in \mathcal{B}$ con $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g)$. Por la definición de $\mathcal{I}$, esto significa que $f^{-1} = g^{-1}$. Como $f$ y $g$ son biyectivas, sus inversas también lo son, y tienen inversas $(f^{-1})^{-1}$, $(g^{-1})^{-1}$. Como $f^{-1} = g^{-1}$, y como sabemos que para cada función biyectiva $h$ se tiene que $(h^{-1})^{-1} = h$, se concluye que $f = (f^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g$, que es lo que había que ver para ver que $\mathcal{I}$ es inyectiva.*
- *La función $\mathcal{I}$ es epiyectiva, porque dada una función $g \in \mathcal{B}$, consideramos $g^{-1}$, y notamos que $\mathcal{I}(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$, que es lo que teníamos que ver.*

*b*) Demuestre que $\Psi \circ \mathcal{I}$ no es epiyectiva.