Pauta Tarea 3 P3).

a) Sea $A \triangle B = A \triangle C$.

Haciendo dif. simétrica con A por la izquierda:

$$A \triangle (A \triangle B) = A \triangle (A \triangle C)$$

Asociando: $\underbrace{(A \triangle A)}_{=\emptyset} \triangle B = \underbrace{(A \triangle A)}_{=\emptyset} \triangle C$

$$\emptyset \triangle B = \emptyset \triangle C \qquad \emptyset \text{ neutro para } \triangle$$

$$B = C$$

b)

$(\Leftarrow)$ Como $A = \emptyset$, $A^c = E$, se tiene que

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (\emptyset \cap B^c) \cup (E \cap B)$$
$$= \emptyset \cup B = B.$$

$$\therefore \quad B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

$(\Rightarrow)$ Notemos que $A \cap B^c = A \setminus B$ $(*)$

$$\Rightarrow \quad B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \qquad \cap \text{ conmuta}$$
$$= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$
$$\overset{(*)}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$= A \triangle B \text{ , por definición de dif. simétrica}$$

Además, $\emptyset$ es neutro para $\triangle \Rightarrow B = B \triangle \emptyset$

Por lo tanto

$$A \triangle B = B \triangle \emptyset \overset{\text{conmuta}}{\iff} B \triangle A = B \triangle \emptyset \xrightarrow{(a)} A = \emptyset .$$

c) Si $X \cup A = Y \cup A$ y $X \cap A = Y \cap A$, entonces

$$X \cup A = Y \cup A \qquad / \text{ dif con } (X \cap A)$$
$$(X \cup A) \setminus (X \cap A) = (Y \cup A) \setminus (X \cap A)$$
$$(X \cup A) \setminus (X \cap A) = (Y \cup A) \setminus (Y \cap A)$$

Por propiedad de la dif. simétrica:

$$\iff X \triangle A = Y \triangle A \overset{\text{conmuta}}{\iff} A \triangle X = A \triangle Y$$

$$\xRightarrow{(a)} X = Y.$$