Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesores: Carlos Conca, Alexander Frank, Raúl Gormaz, Alexis Fuentes, Álvaro Hernández, y Avelio Sepúlveda

Tarea 2

3 de diciembre de 2021

El objetivo de esta tarea es estudiar dos técnicas para resolver la ecuación del calor con fuente independiente del tiempo. Para esto trabajaremos con la ecuación del calor en una dimensión en una barra de tamaño π con constante de difusión $\alpha > 0$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + F(x) \qquad \forall t > 0, x \in (0,\pi) \qquad \text{(EDC)}$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \qquad \text{(CB)}$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad \forall x \in [0,\pi] \qquad \text{(CI)}$$

Para simplificar, asumiremos que $F(x) = \sin(x) + 3\sin(4x) - \sin(5x)$ y que la condición inicial es $g(x) = \sin(2x) + \sin(4x)$.

P1. Primera técnica: calcular una solución particular.

(a) Encuentre una solución u_p de (EDC) y (CB) que sea constante en tiempo, i.e., $u(x,t) = \tilde{u}(x)$ para todo $t \geq 0$.

(b) Usando el principio de superposición, estudie la ecuación que satiface $v = u - u_p$ y resuélvala. Luego, calcule la solución del problema (EDC), (CB) y (CI).
Comentario para la solución: En este problema se pueden usar resultados del apunte si se cita correctamente. (Indicar el teorema o la página de la cuál se usa el resultado).

P2. Segunda técnica: resolver el problema en espacio de Fourier.
Inspirados por el método de separación de variables asumamos que la solución de (EDC), (CB) y (CI) se escribe como

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$$

con $T_k(t)$ a encontrar. Asuma que $X_k(x) = \sin(kx)$.

(a) Calcule una ecuación diferencial para cada $T_k(t)$.

(b) Encuentre la solución para cada $T_k(t)$ y calcule $u(x,t)$.

P1. Solución

(a) Para que $u_p = u_p(x)$ resuelva la ecuación debe ocurrir que

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + F(x) \Leftrightarrow 0 = \alpha u_p'' + F(x) \quad \text{(0.4 puntos)}$$
$$u_p(0) = 0 \quad \text{(0.3 puntos)}$$
$$u_p(\pi) = 0 \quad \text{(0.3 puntos)}$$

la ecuación de arriba es una EDO la cual se resuelve integrando dos veces:

$$\begin{aligned}
\alpha u_p'(x) &= -\int F(x)dx + c_1 \\
&= -\int (\sin x + 3\sin 4x - \sin 5x)dx + c_1 \\
&= \cos x + \frac{3}{4}\cos 4x - \frac{1}{5}\cos 5x + c_1 \\
\alpha u_p(x) &= \int \left(\cos x + \frac{3}{4}\cos 4x - \frac{1}{5}\cos 5x + c_1\right) dx + c_2 \\
&= \sin x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{25}\sin 5x + c_1 x + c_2 \quad \text{(0.3 puntos)}
\end{aligned}$$

usando las condiciones iniciales podemos encontrar los valores de c_1 y de c_2:

$$\begin{aligned}
\alpha u_p(0) &= 0 = \sin 0 + \frac{3}{16}\sin 0 - \frac{1}{25}\sin 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 0 \quad \text{(0.3 puntos)} \\
\alpha u_p(\pi) &= 0 = \sin \pi + \frac{3}{16}\sin \pi - \frac{1}{25}\sin \pi + c_1 \pi = c_1 \pi \Longrightarrow c_1 = 0 \quad \text{(0.3 puntos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u_p(x) = \frac{1}{\alpha}\left(\sin x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{25}\sin 5x\right) \quad \text{(0.1 puntos)}$$

(b) Consideramos ahora $v = u - u_p$ y calculamos:

$$\begin{aligned}
v_t &= u_t - (u_p)_t = u_t \\
\alpha v_{xx} &= \alpha u_{xx} - \alpha u_p'' \\
&= u_t - F + F \\
&= u_t
\end{aligned}$$

Es decir

$$v_t = \alpha v_{xx} \quad \text{(0.8 puntos)}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
v(0,t) &= u(0,t) - u_p(0) \\
&= 0 - 0 = 0 \quad \text{(0.2 puntos)} \\
v(\pi,t) &= u(\pi,t) - u_p(\pi) \\
&= 0 - 0 \quad \text{(0.2 puntos)} \\
v(x,0) &= u(x,0) - u_p(x) \\
&= g(x) - u_p(x) \quad \text{(0.4 puntos)}
\end{aligned}$$

En resumen: v resuelve

$$\begin{cases}
v_t = \alpha v_{xx} & t > 0,\ x \in]0,\pi[\\
v(0,t) = 0 & t \geqslant 0 \\
v(\pi,t) = 0 & t \geqslant 0 \\
v(x,0) = g(x) - u_p & x \in [0,\pi]
\end{cases}$$

De acuerdo a la expresión que está después de la ecuación (16.14) de la página 231 del apunte del curso podemos decir (usando $L = \pi$) entonces que

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha k^2 t} \sin kx \quad \text{(0.8 puntos)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = g(x) - u_p(x) \\ &= \sin 2x + \sin 4x - \frac{1}{\alpha}\left(\sin x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{25}\sin 5x\right) \quad \text{(0.4 puntos)} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta ambas combinaciones lineales, necesariamente los coeficientes uno a uno deben ser iguales, es decir

$$A_k = \begin{cases} 0 & k \neq 1,2,4,5 \quad \text{(0.2 puntos)} \\ \frac{-1}{\alpha} & k = 1 \quad \text{(0.1 puntos)} \\ 1 & k = 2 \quad \text{(0.1 puntos)} \\ 1 - \frac{3}{16\alpha} & k = 4 \quad \text{(0.1 puntos)} \\ \frac{1}{25\alpha} & k = 5 \quad \text{(0.1 puntos)} \end{cases}$$

En consecuencia, lo anterior quiere decir que la solución es

$$\begin{aligned} v(x,t) &= A_1 e^{-\alpha\cdot 1^2 t}\sin 1x + A_2 e^{-\alpha\cdot 2^2 t}\sin 2x + A_4 e^{-\alpha\cdot 4^2 t}\sin 4x + A_5 e^{-\alpha\cdot 5^2 t}\sin 5x \\ &= \frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin x + e^{-4\alpha t}\sin 2x + \left(1 - \frac{3}{16\alpha}\right)e^{-16\alpha t}\sin 4x + \frac{1}{25\alpha}e^{-25\alpha t}\sin 5x \quad \text{(0.3 puntos)} \end{aligned}$$

y por tanto la solución al problema original es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + u_p(x) \\ &= \frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\sin x + e^{-4\alpha t}\sin 2x + \left(1 - \frac{3}{16\alpha}\right)e^{-16\alpha t}\sin 4x + \frac{1}{25\alpha}e^{-25\alpha t}\sin 5x \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\left(\sin x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{25}\sin 5x\right) \quad \text{(0.3 puntos)} \end{aligned}$$

P2. Solución

(a) Tomando en cuenta que $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx T_k(t)$ se reemplaza en llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx T'(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha k^2 \sin kx T(t) + F(x) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)\left(T'(t) + \alpha k^2 T(t)\right) &= F(x) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)\left(T'(t) + \alpha k^2 T(t)\right) &= \sin x + 3\sin 4x - \sin 5x \quad \text{(0.8 puntos)} \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que ambas combinaciones lineales debe ser iguales y por tanto igualamos los coeficientes uno a uno:

$$\text{(0.3 puntos cada una)} \begin{cases} T_1' + \alpha T_1 = 1 & k = 1 \\ T_4' + 16\alpha T_4 = 3 & k = 4 \\ T_5' + 25\alpha T_5 = -1 & k = 5 \\ T_k' + \alpha k^2 T_k = 0 & k \neq 1, 4, 5 \end{cases}$$

Antes de resolver las ecuaciones de arriba debemos encontrar condiciones iniciales, para ello notamos que $u(x, 0) = g(x)$, o equivalentemente:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx T_k(0) = \sin 2x + \sin 4x \quad \text{(0.6 puntos)}$$

Usando el mismo argumento de antes, los coeficientes deben ser iguales uno a uno, por tanto:

$$\text{(0.3 puntos cada una)} \begin{cases} T_2(0) = 1 & k = 2 \\ T_4(0) = 1 & k = 4 \\ T_k(0) = 0 & k \neq 2, 4 \end{cases}$$

Juntando las ecuaciones de arriba con sus respectivas condiciones iniciales llegamos a

$$\text{(0.1 puntos cada una)} \begin{cases} k = 1 : \begin{cases} T_1' + \alpha T_1 = 1 \\ T_1(0) = 0 \end{cases} \\ k = 2 : \begin{cases} T_2' + 4\alpha T_2 = 0 \\ T_2(0) = 1 \end{cases} \\ k = 4 : \begin{cases} T_4' + 16\alpha T_4 = 3 \\ T_4(0) = 1 \end{cases} \\ k = 5 : \begin{cases} T_5' + 25\alpha T_5 = -1 \\ T_5(0) = 0 \end{cases} \\ k \neq 1, 2, 4, 5 : \begin{cases} T_k' + \alpha k^2 T_k = 0 \\ T_k(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

(b)

$$\text{(0.3 puntos cada una)} \begin{cases} T_1(t) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \\ T_2(t) = e^{-4\alpha t} \\ T_4(T) = \frac{3}{16\alpha} + \left(1 - \frac{3}{16\alpha}\right) e^{-16\alpha t} \\ T_5(t) = \frac{-1}{25\alpha} + \frac{1}{25\alpha} e^{-25\alpha t} \\ T_k(t) = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx T_k(t) \\
&= \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)\sin x + e^{-4\alpha t}\sin 2x \\
&+ \left[\frac{3}{16\alpha} + \left(1 - \frac{3}{16\alpha}\right)e^{-16\alpha t}\right]\sin 4x + \left(\frac{-1}{25\alpha} + \frac{1}{25\alpha}e^{-25\alpha t}\right)\sin 5x \quad \text{(0.5 puntos)}
\end{aligned}
$$

Lo cual es claramente igual a la solución encontrada entariormente.