

MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 2

Se entrega el primer ítem de cada pregunta.

P1. Sea E un conjunto de referencia, p una proposición lógica y $Q(x)$ una función proposicional.

- a) Definamos la proposición r como $(\forall x \in E)(p \Rightarrow Q(x))$. Determine el valor de verdad de la proposición p , sabiendo que r es falsa.

Solución: Usando la caracterización del implica, podemos reescribir la proposición r como $(\forall x \in E)(\bar{p} \vee$ 1.5 pt.

$Q(x))$. Ahora, la negación de r es equivalente a $(\exists x \in E)(\bar{p} \vee Q(x))$. Luego, las Leyes de De Morgan nos 1.5 pt.

aseguran que la negación de r es equivalente a $(\exists x \in E)(p \wedge \bar{Q}(x))$. 1.5 pt.

Nos dicen que r es falsa, es decir, $\bar{r}$ es verdadera. Por lo desarrollado anteriormente tenemos que $(\exists x \in E)(p \wedge \bar{Q}(x))$ es verdadera. Esto es, existe $x \in E$ tal que $p \wedge \bar{Q}(x)$ es verdadera. Recordando que la conjunción es verdadera cuando ambas proposiciones lo son, podemos concluir que la proposición p es verdadera. 1.5 pt.

P2. Pruebe mediante inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- a) $n! \geq 2^n$, para $n \geq 4$.

Solución: Analicemos el caso base dado por $n_0 = 4$. Notemos que $4! = 24$ y $2^4 = 16$, por lo que la desigualdad se verifica para el caso base. 1.5 pt.

Supongamos ahora que la desigualdad es cierta para $n \in \mathbb{N}$, es decir, $n! \geq 2^n$. Para concluir mediante inducción, debemos probar que $(n+1)! \geq 2^{n+1}$. En efecto, sabemos que $(n+1)! = (n+1)n!$. Luego, por la hipótesis de inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ se sigue que

$$(n+1)! \geq (n+1)2^n. \quad (1) \quad 1.5 \text{ pt.}$$

Ahora, como $n \geq 4$, podemos ver que $n+1 \geq 2$. Combinando esto último con la desigualdad (1) obtenemos 1.5 pt.

$$(n+1)! \geq 2^{n+1}. \quad 1.5 \text{ pt.}$$

Como queramos probar, concluyendo la solución.

P3. Consideremos A y B conjuntos no vacíos, y sean $p(x)$ y $q(x)$ funciones proposicionales. Supongamos que las siguientes proposiciones son verdaderas

$$R : (\exists x \in A)(\exists x' \in A) \quad (p(x) \Leftrightarrow \overline{p(x')})$$

$$S : (\forall x \in A)(\exists y \in B) \quad (p(x) \Rightarrow q(y))$$

$$T : (\forall x \in A)(\exists y \in B) \quad (q(y) \Rightarrow p(x))$$

Pruebe que

- a) $(\exists x \in A) p(x) \wedge (\exists x \in A) \overline{p(x)}$.

Solución: La proposición R nos asegura que existe un x_0 y x_1 en A tales que $p(x_0) \Leftrightarrow \overline{p(x_1)}$. Pueden ocurrir dos casos: que $p(x_0)$ sea verdadera o falsa. 2 pt.

- En el caso que $p(x_0)$ sea verdadera, tomando $x = x_0$, se sigue que $(\exists x \in A)p(x)$ y tomando $x = x_1$ obtenemos $(\exists x \in A)\overline{p(x)}$. 2 pt.

- En el caso $p(x_0)$ sea falsa, entonces $p(x_1)$ es verdadera. Por lo que tomando $x = x_1$ tenemos $(\exists x \in A)p(x)$, y tomando $x = x_0$ se sigue $(\exists x \in A)\overline{p(x)}$. 2 pt.

En cualquier caso se verifica la proposición pedida.