MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 12

P1. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ las raíces $n-$ésimas de la unidad.

a) Pruebe que $\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k = 0$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
Solución: Sabemos que las raíces $n-$ésimas de la unidad están dadas por $w_j = e^{i2\pi j/n}$ para $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Notemos que $w_j = (e^{i2\pi/n})^j = w_1^j$. Luego,

$$\sum_{j=1}^{n-1}(w_j)^k = \sum_{j=1}^{n-1}(w_1^j)^k = \sum_{j=1}^{n-1}(w_1^k)^j.$$

Ya que esta última sumatoria es del tipo geométrica, y usando que $(w_1^k)^n = 1$ y que $w_1^k \neq 1$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n-1}(w_j)^k = \frac{1-(w_1^k)^n}{1-w_1^k} = 0,$$

para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

b) Definiendo el polinomio $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$, para $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pruebe que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = P(0).$$

(Puede usar el ítem anterior).
Solución: Notemos que al evaluar el polinomio P en w_j obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} a_k (w_j)^k.$$

Intercambiando el orden de las sumatorias y usando que $a_k \in \mathbb{C}$ no dependen de j se sigue que

$$\sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k. \tag{1}$$

El ítem anterior nos dice que para $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ la suma $\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k$ es cero, por lo que sólo sobrevive el término $k = 0$ en (1). Así,

$$\sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = a_0\left(\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^0\right) = a_0 n. \tag{2}$$

Como $P(0) = a_0$, el resultado se sigue de (2).

P2. Consideremos el anillo $A[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$(no es necesario probar que es anillo), para la suma y producto usual de polinomios, definido por $A[x] := \{P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid P(1) = 0\}$. Pruebe que $P \in A[x]$ si y sólo si existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) = (x-1)Q(x)$.
Solución:
($\Longrightarrow$) Si $P \in A[x]$, entonces $x = 1$ es raíz de P. Luego $x-1$ divide a P, es decir, existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) = (x-1)Q(x)$. Esto prueba la implicancia.
($\Longleftarrow$) Si tenemos $P(x) = (x-1)Q(x)$ con $Q \in \mathbb{R}[x]$, entonces se sigue que $P(1) = 0$ y por tanto $P \in A[x]$.

P3. Calcular las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tales que al dividir el polinomio $P(x) = \alpha x^4 - x^3 + \beta x^2 + 10x - 2\alpha$ por $Q(x) = x - 1$, el resto es $R(x) = 3$ y el cuociente es un polinomio $G(x)$ que verifica $G(2) = 21$. (**Corresponde a materia de la semana 14**)

P4. Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ dado por $P(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Definamos $Q \in \mathbb{C}[x]$ por $Q(x) := P(ix)$. Demuestre que $P = Q$, si y solo si, para cada k que no es multiplo de 4 se tiene que $a_k = 0$.