

MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 11

Se entregan la P1a, la P2a y la P3b.

P1. Sea $z \in \mathbb{C}$.

- a) Suponiendo que $|z| > 1$ y $\text{Im}(z) > 0$, muestre que $\text{Im}(z + \frac{1}{z}) > 0$.

Solución:

El hecho que $|z| > 1$ implica que $\sqrt{\text{Im}(z)^2 + \text{Re}(z)^2} > 1$, por lo que también $\text{Im}(z)^2 + \text{Re}(z)^2 > 1$. Considerando el inverso multiplicativo $\frac{1}{z}$ de z , se nota que $\text{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{-\text{Im}(z)}{\text{Im}(z)^2 + \text{Re}(z)^2}$. Juntando estas dos observaciones, se tiene que $\text{Im}(\frac{1}{z}) > \frac{-\text{Im}(z)}{1} = -\text{Im}(z)$. Ahora, $\text{Im}(z + \frac{1}{z}) = \text{Im}(z) + \text{Im}(\frac{1}{z}) > \text{Im}(z) - \text{Im}(z) = 0$, que es lo que se quería demostrar.

- b) Suponiendo que $|z| = 1$ y $z \neq -1$, muestre que $z(1 + \bar{z}) = 1 + z$.
 c) Muestre que $z^2 \in \mathbb{R}$ si y solamente si $0 \in \{\text{Re}(z), \text{Im}(z)\}$.

P2. a) Muestre que no existe un número complejo z tal que $2|z| - z = i$.

Solución:

Ver adjunto.

- b) Escriba $z = 18 \cdot e^{i\pi/4}$ en forma cartesiana. Escriba $z = 3 \cdot e^{i\pi}$ en forma cartesiana.
 c) Escriba $-2 - 2i$ en forma polar. Escriba $\frac{1}{2+2i}$ en forma polar.
 d) Determina $\text{Im}(z)$ y $\text{Re}(z)$ para $z = (1 - i)^{10}$. (Indicación: Se puede usar la fórmula de De Moivre.)

P3. a) Determine z sabiendo que $z \in \mathbb{C}$ y $\frac{z^5}{3} = i - 1$.

- b) Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que el producto de las raíces n -ésimas de z es $(-1)^{n-1}z$.

Solución:

Sea r el módulo de z y sea ϕ el argumento de z . Por definición de las raíces n -ésimas el producto pedido es $\prod_{k=0}^{n-1} r^{1/n} e^{i \cdot \frac{\phi + 2k\pi}{n}}$, donde se usa la notación $\prod_{k=0}^m a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_m$. Notamos que

$$\prod_{k=0}^{n-1} r^{1/n} \cdot e^{i \cdot \frac{\phi + 2k\pi}{n}} = (r^{1/n})^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} e^{i \cdot (\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = r \cdot \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i \cdot \left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = r \cdot \exp\left(i\phi + i \frac{2\pi}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k\right)$$

$$= r \cdot \exp(i\phi) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2}\right) = z \cdot \exp(i\pi(n-1)) = z \cdot (\exp(i\pi))^{n-1} = z \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}z$$

- c) Sea $z = e^{i \cdot \frac{2\pi}{5}}$. Demuestre que $\frac{1}{5}(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)(1 - z^4) = 1$.

$$\text{FDS: } \nexists z \in \mathbb{C} : 2|z| - z = i$$

Por contradicción, suponemos que $\exists z \in \mathbb{C} : 2|z| - z = i$

$$\Rightarrow |z| = \frac{z+i}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{2}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = -1$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+i}{2}\right) = |z| \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 2|z|$$

$$\xrightarrow{\lambda} \leftarrow$$

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

$$2|z| \leq |z|$$

$$\text{OBS } 2|z| \leq |z| \Leftrightarrow |z| = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0$$

$$\text{pero si } z=0, \quad 2|z| - z = 0 \neq i$$