

MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 10

Se entrega P1 b), P2 b) y P3 c).

P1. Sea $(G, *)$ un grupo no necesariamente abeliano, con neutro e_G . Para $a \in G$, se define la función $f_a : G \rightarrow G$ por $f_a(x) := a * x * a^{-1}$.

- Verifique que $f_e = id_G$, y que para todo $a, b \in G$ se tiene $f_{a*b} = f_a \circ f_b$, donde $\circ$ representa la composición de funciones.
- Demuestre que para todo $a \in G$, la función f_a define un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$. Verifique que $f_a^{-1} := f_{a^{-1}}$.

Solución:

- Notemos que f_a define un endomorfismo en $(G, *)$. Como $a^{-1} * a = e_G$ para todo $a \in G$, podemos escribir para $x, y \in G$, luego de usar la asociatividad de $*$, la siguiente igualdad $a * x * y * a^{-1} = (a * x) * e_G * (y * a^{-1}) = (a * x * a^{-1}) * (a * y * a^{-1})$. Lo anterior nos dice que $f_a(x * y) = f_a(x) * f_a(y)$, y por tanto f_a es endomorfismo.
- Veamos ahora que f_a es inyectiva. Para esto, consideremos $x, y \in G$ tales que $f_a(x) = f_a(y)$. De la definición de f_a , se tiene que x e y verifican $a * x * a^{-1} = a * y * a^{-1}$. Como los elementos $a, a^{-1} \in G$ son cancelables obtenemos $x = y$. Así, f_a es inyectiva.
- Por último veamos que f_a es sobreyectiva. Sea $y \in G$ y definamos $x := a^{-1} * y * a$. Luego, $x \in G$ verifica $f_a(x) = a * (a^{-1} * y * a) * a^{-1}$. Asociando y usando que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e_G$ se sigue que $f_a(x) = y$. Es decir, f_a es epiyectiva.
- Los puntos anteriores nos aseguran que f_a posee inversa, y nos piden verificar que dicha inversa está dada por $f_{a^{-1}}$. En efecto, para $a \in G$ tenemos que, según el ítem a), $f_a \circ f_{a^{-1}} = f_{e_G} = id_G = f_{a^{-1}} \circ f_a$. Por lo tanto, la inversa de f_a es $f_{a^{-1}}$.

- Demuestre que el conjunto $H(G) := \{a \in G \mid f_a = id_G\}$ es un subgrupo de $(G, *)$.

P2. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $(H_1, *)$ y $(H_2, *)$ dos subgrupos de $(G, *)$.

- Pruebe que el conjunto $L := \{h_1 * h_2 \mid h_1 \in H_1 \text{ y } h_2 \in H_2\}$ define un subgrupo de $(G, *)$.
- Pruebe que si $H_1 \cap H_2 = \{e_G\}$, donde e_G es el neutro de G , entonces $f(h_1, h_2) := h_1 * h_2$ define un isomorfismo entre $(H_1 \times H_2, \Delta)$ y $(L, *)$, donde la operación Δ está dada por $(h_1, k_1) \Delta (h_2, k_2) := (h_1 * h_2, k_1 * k_2)$.

Solución:

- Veamos que f define un morfismo. Sean $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H_1 \times H_2$. Luego,

$$\begin{aligned} f((h_1, k_1) \Delta (h_2, k_2)) &= f(h_1 * h_2, k_1 * k_2) \\ &= (h_1 * h_2) * (k_1 * k_2). \end{aligned}$$

Como $(G, *)$ es grupo abeliano, al asociar y conmutar adecuadamente, obtenemos $f((h_1, k_1) \Delta (h_2, k_2)) = (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2) = f(h_1, k_1) * f(h_2, k_2)$. Por lo tanto f es morfismo.

- Veamos ahora que f es inyectiva. Sean $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H_1 \times H_2$ tales que $f(h_1, k_1) = f(h_2, k_2)$. Es decir, $h_1 * k_1 = h_2 * k_2$. Esto nos dice que, al operar h_2^{-1} por la izquierda y por k_1^{-1} por la derecha, y luego asociar, obtenemos $h_2^{-1} * h_1 = k_2 * k_1^{-1} \in H_1 \cap H_2$. Ya que $H_1 \cap H_2 = \{e_G\}$, se sigue que $h_2^{-1} * h_1 = e_G$ y $k_2 * k_1^{-1} = e_G$. Así, $h_1 = h_2$ y $k_1 = k_2$. Concluyendo que f es inyectiva.
- Para la epiyectividad, notemos que todo elemento de $y \in L$ es de la forma $y = h_1 * h_2$ con $h_1 \in H_1$ y $h_2 \in H_2$. Luego, para $x := (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ se verifica $f(x) = h_1 * h_2 = y$. Por lo tanto f es epiyectiva.

En resumen f define un isomorfismo entre $(H_1 \times H_2, \Delta)$ y $(L, *)$.

P3. Si $(A, +, \cdot)$ es un anillo tal que $x \cdot x = x$ para todo $x \in A$. Pruebe que

- a) $x = -x$ para todo $x \in A$.
- b) $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.
- c) $(x \cdot y) \cdot (x + y) = 0$ para todo $x, y \in A$.

Solución:

Denotemos $z := (x \cdot y) \cdot (x + y)$. Sabemos que la operación $\cdot$ distribuye sobre $+$ ya que estamos sobre un anillo. Así, $z = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) \cdot y$. Ahora, usando la asociatividad y que según el ítem b) el anillo es conmutativo, podemos escribir $z = (x \cdot x) \cdot y + x \cdot (y \cdot y)$. Por hipótesis se sigue que $z = x \cdot y + x \cdot y$. Usando el ítem a) tenemos que $x \cdot y = -(x \cdot y)$. Así, concluimos que $z = 0$.

P4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, diremos que un subconjunto $I \subseteq A$ es un ideal de A si verifica que $(I, +)$ es un subgrupo de $(A, +)$ y además para todo $a \in A$ y $b \in I$ se tiene que $a \cdot b \in I$ y $b \cdot a \in I$. Supongamos que A es un anillo con unidad $1 \in A$ y que $I \subseteq A$ es un ideal de A .

- a) Pruebe que si $1 \in I$, entonces $I = A$.
- b) Pruebe que si existe $x \in I$ invertible para $\cdot$ en A , entonces $I = A$.