UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2021
MA2601, ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SECCIONES COORDINADAS

PAUTA TAREA 1

P1.-

Parte A

Considere la ecuación diferencial

$$y^2(x^2+y^3)y' - x = 0. \tag{1}$$

1. (1 pts.) Utilizando sustitución

$$z = x^2 + y^3 \tag{2}$$

en (1), demuestre que se obtiene la siguiente EDO en la variable z

$$z' = \left(\frac{3}{z} + 2\right)x \tag{3}$$

Solución: Usando la sustitución dada por el enunciado y notando que y derivable implica z también (donde corresponda), se tiene:

$$z = x^2 + y^3 \Rightarrow z' = 2x + 3y^2y' \tag{4}$$

Procedemos reordenando adecuadamente (1) y luego reemplazamos:

$$\begin{aligned} y^2(x^2+y^3)y' - x &= 0 \\ 2x + 3y^2y' &= \frac{3x}{x^2+y^3} + 2x \quad \leftarrow (\star) \\ z' &= \frac{3x}{z} + 2x \\ z' &= (\frac{3}{z} + 2)x. \end{aligned}$$

Cabe señalar que este es un reordenamiento posible para obtener la EDO en la variable z. Observar además que $(\star)$ requiere que $z \neq 0$, al reemplazar $z = 0$ en la EDO (1) se obtiene $x = 0$, lo cual no aporta información adicional ni tampoco impone alguna restricción al problema.

Distribución de puntajes:

- (0,5 pts.) Derivar y obtener (4).
- (0,5 pts.) Reordenar (1) para luego reemplazar (4) y así obtener (3).

2. (1 pts.) Probar que $x \mapsto z(x) = -3/2$ con $x \in \mathbb{R}$ es solución constante de (3) y que la correspondiente solución para (1) está dada por $y_1(x) = -\sqrt[3]{3/2 + x^2}$ con x real. Verifique esto último (no olvide comprobar que efectivamente y_1 es solución de (1))

Solución: Reemplazamos $z = -3/2$ en (3) para obtener

$$z' = (\frac{3}{-3/2} + 2)x \Rightarrow z' = (-2 + 2)x \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z = K \in \mathbb{R} \tag{5}$$

La correspondiente solución de la ecuación original se obtiene reemplazando en la sustitución (2):

$$-\frac{3}{2} = x^2 + y^3 \Longrightarrow y_1(x) = -\sqrt[3]{3/2 + x^2}$$

Ahora verificamos que y_1 es efectivamente solución de (1)

$$-\frac{3}{2}(\frac{3}{2} + x^2)^{2/3}(-\frac{2x}{3(\frac{3}{2} + x^2)^{2/3}}) - x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{3} - x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \tag{6}$$

Así, la solución y_1 se verifica para (1) y esta definida en todo $\mathbb{R}$ como tal ■

Distribución de puntajes:

- $(0,3$ pts.$)$ comprueba que $z(x) = -3/2$ es solución constante de (3).
- (0,3 pts.) comprueba que la correspondiente solución para (1) es y_1.
- (0,4 pts.) comprueba que efectivamente y_1 es solución de (1).

3. (1 pts.) Separando variables resolver la EDO (3) y obtenga una expresión para la correspondiente solución general de (1). ¿Se puede recuperar y_1 de la parte anterior a partir de esta solución general? Comente.

Solución: Ocupando variables separables en (3) tenemos:

$$\frac{dz}{\frac{3}{z}+2} = xdx \Longrightarrow \int \frac{dz}{\frac{3}{z}+2} = \int xdx$$
$$\int \frac{z}{3+2z} dz = \int xdx \tag{7}$$
$$\frac{z}{2} - \frac{3}{4}\ln(|3+2z|) = \frac{x^2}{2} + c$$
$$\frac{x^2+y^3}{2} - \frac{3}{4}\ln\left|3+2\left(x^2+y^3\right)\right| = \frac{x^2}{2} + c$$
$$x^2+y^3 - \frac{3}{2}\ln\left(3+2\left|x^2+y^3\right)\right| = x^2 + c$$
$$y^3 - \frac{3}{2}\ln\left|3+2\left(x^2+y^3\right)\right| = c \tag{8}$$

Se obtiene por lo tanto una solución definida implícitamente y válida como tal en $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + y^3(x) \neq -3/2\}$.
Notemos que la solución y_1 se obtendría igualando a cero el argumento de la función logaritmo de arriba, lo cual no es posible, pues se indefine en el origen, de esta forma no es posible recuperar la solución a partir de la la solución general.

Distribución de puntajes:

- $(0,3$ pts.$)$ Plantear la ecuación como las integrales en (7)
- (0,3 pts.) Obtiene la solución general en (8).
- (0,4 pts.) Argumenta correctamente el por qué no se puede recuperar la solución y_1.

Parte B

Considere la siguiente EDO en la variable y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} f(ty), \quad t \neq 0. \tag{9}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

1. (1 pts.) Estudie la EDO el caso en que la función f es la función constante -1.

Solución: Si $f = -1$, se tiene la EDO

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t} \tag{10}$$

Notemos que $y = 0$ es solución constante de la EDO. Luego, si $y \neq 0$, utilizando variables separables, se tiene

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dt}{t}$$
$$\ln|y| = -\ln|t| + c$$
$$y = \pm\frac{K}{t}, \quad K > 0 \tag{11}$$

Distribución de puntajes:

- (0,2 pts.) Identifica el caso $y = 0$ y determina que es solución constante de (10).
- (0,3 pts.) Reemplaza $f = -1$ en (9) y obtiene (10).
- (0,5 pts.) Resuelve la EDO y obtiene (11).

2. (1 pts.) Ahora considere el caso $f(u)$ genérica y utilice el cambio $u = ty$ y verifique que este transforma (9) en $u't = u(1 + f(u))$. Finalmente entregue una expresión que conduce a la solución general en u, en términos de una integral.

Solución: Tenemos el cambio de variable, como y es derivable entonces u también lo es, luego

$$u = ty \; u' = y + ty' \tag{12}$$

Reordenando (9) y reemplazando lo anterior se tiene

$$y' = \frac{y}{t}f(ty)$$
$$y + ty' = y[1 + f(ty)]$$
$$t(y + ty') = ty[1 + f(ty)] \quad \leftarrow t \neq 0$$
$$u't = u[1 + f(u)] \tag{13}$$

Luego, resolviendo (13) mediante variables separables, se tiene:

$$\int \frac{du}{u[1 + f(u)]} = \ln|t| + c \tag{14}$$

Para todo $f(u) \neq -1$, es decir, $\frac{1}{u[1+f(u)]}$ es continua (y luego integrable) para $\forall u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Puntaje:

- (0,2 pts.) Obtiene el cambio en (12)
- (0,5 pts.) Reordena (9), reemplaza (12) y obtiene (13).
- (0,3 pts.) Obtiene (14) en términos de una integral para $u \neq 0$.

3. (1pts.) Aplicar la parte anterior para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(ty + 1)}{-t(1 + ty + t^2y^2)} \quad t \neq 0. \tag{15}$$

Solución: Utilizando (13), se tiene que la EDO a resolver es

$$u't = u[1 - \frac{u+1}{1+u+u^2}] \tag{16}$$

Aquí notemos que $u = 0$ es solución constante de (16), tal como en la parte anterior. Asimismo, notemos que $1+u+u^2 = (u+1/2)^2 + 3/4 > 0$, para todo u real, por lo que $f(u)$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Finalmente, si $f(u) = 0 \Rightarrow u = -1$, quedando la EDO una igualdad errónea $0 = 1$. Así, $u = -1 \iff y = \frac{-1}{t}$ no es solución de la EDO. Procediendo según la integral encontrada en (14) tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u[1-\frac{u+1}{1+u+u^2}]} &= \ln|t| + c \\
\int \frac{u^2+u+1}{u^3} du &= \ln|t| + c \qquad (17) \\
\ln|u| - \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} &= \ln|t| + c \\
\ln|ty| - \frac{1}{ty} - \frac{1}{2t^2y^2} &= \ln|t| + c \\
\ln|y| - \frac{1}{ty} - \frac{1}{2t^2y^2} &= c \qquad (18)
\end{aligned}$$

La solución implícita de la EDO para $t \neq 0$ con $c \in \mathbb{R}$.

Distribución de puntajes:

- (0,2 pts.) Establece que (16) es la EDO a resolver dado $u = ty$
- (0,3 pts.) Establece que $f(u)$ no se indefine en $\mathbb{R}$ y $y = \frac{-1}{t}$ no es solución de (15).
- (0,3 pts.) Aplica (14) para resolver (16) y plantea (17).
- (0,2 pts.) Resuelve la integral y obtiene la solución implícita (18) para y.

****

P2.-

Parte A

(3 puntos) Hallar la familia de curvas que satisfacen las siguientes propiedades:

- El gráfico está en el primer cuadrante.
- Son de clase C^1 es decir son derivables con derivada continua.
- Cualquier punto P en la curva es el punto medio del segmento de recta que une los puntos de intersección de la recta tangente a la curva en P con los ejes coordenados.

Ind: Recordar que la ecuación de la recta tangente al gráfico de una función derivable $x \mapsto y(x)$ en el punto $P = (x_0, y(x_0))$, está dada por $y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$.
Obs: Se entiende por segmento como un trazo de longitud estrictamente positiva.

Solución: Sea $P(x_0, y(x_0))$ un punto en la curva, miembro de la familia buscada (suponemos no vacía). Usando la ecuación recta-tangente en P, calculamos las intersecciones en OX y OY, resultando:

$$M = \left(\frac{-y_0}{y'(x_0)} + x_0, 0\right) \wedge N = (0, y_0 - y'(x_0)x_0); \quad y'(x_0) \neq 0 \tag{19}$$

Notar que $y'(x_0) = 0$ indica que en ese punto la curva es localmente horizontal, luego la recta tangente en dicho punto no corta al eje OX. Descartado ello, para un triángulo recto en el plano con hipotenusa $\overline{MN}$, la condición que define la familia de curvas es $\overline{PN} = \overline{MP}$, con P punto medio del trazo $\overline{MN}$. Así se tiene

$$\begin{aligned} x_0^2 + (y'(x_0)x_0)^2 &= \frac{y_0^2}{y'(x_0)^2} + y_0^2 \\ y'(x_0)^2 &= (\frac{y_0}{x_0})^2 \\ y'(x_0) &= \pm\frac{y_0}{x_0}, \end{aligned} \tag{20}$$

como P es arbitrario en el primer cuadrante, se obtiene una EDO de variables separables que define la familia definida en enunciado. Veamos cada EDO por casos, viendo primero el positivo:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + c \\ y &= mx, \quad m > 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Acá hay que considerar dos casos como respuesta admisible, el primero es decir que $x \mapsto y(x) = mx$ es solución del problema (ie pertenece a la familia buscada) pues la tangente a ella en cualquier punto $P = (x_0, x_0)$ es la misma curva y la intersección de ella con los ejes se da en $M = N = (0,0)$ por ende se tiene la condición $\overline{PM} = \overline{PN} = x_0\sqrt{1+m^2}$. El segundo es que como $N = N$ entonces no existe trazo $\overline{MN}$ (de magnitud > 0) positivo para tomar un punto medio en él, por ende este caso no reporta miembros a la familia de curvas buscada Esto es importante para la corrección, aceptar alguno de los argumentos ($\star\star$).

Ahora volviendo a (20), para el caso negativo tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= -\ln|x| + c \\ y &= \frac{k}{x}, \quad k > 0 \end{aligned} \tag{22}$$

donde $y = \frac{k}{x}$ pertenece a la familia de curvas buscada, $\forall x > 0$. Luego, la familia de curvas que cumplen las condiciones enunciadas está constituida por:

$$x \mapsto y(x) = mx \wedge x \mapsto y(x) = \frac{k}{x}, \quad m, k > 0 \tag{23}$$

o bien sólo las hipérbolas siendo consecuente si se argumenta como se explica en $(\star\star)$

Puntaje:

- $(0{,}7$ pts.$)$ Determina las intersecciones (19) con OX y OY.
- $(0{,}8$ pts.$)$ Establece el punto medio del trazo $\overline{MN}$ y obtiene la EDO de variables separables en (20).
- $(0{,}5$ pts.$)$ Obtiene la solución para el caso positivo (21) y determina que $y = mx$ son curvas del caso positivo perteneciente a la familia descrita. O bien argumentar que no de acuerdo a la razón descrita en la pauta, para ello ver $(\star\star)$.
- $(0{,}5$ pts.$)$ Obtiene la solución para el caso negativo (22) y determina que $y = \frac{k}{x}$ es un conjunto de curvas perteneciente a la familia descrita, para $k > 0$ real.
- $(0{,}5$ pts.$)$ Obtiene (23), la familia de curvas buscada.

Parte B

(3 puntos) Suponga que la dinámica de población de una cierta especie obedece a la siguiente ley logística

$$p' = ap - bp^2. \tag{24}$$

donde $p = p(t)$ es la cantidad de individuos de la especia en el instante t y p' indica la derivada de p con respecto al tiempo. En el instante en que la cantidad de individuos es Q, con $Q < a/b$ la población comienza a verse afectada por las condiciones climatológicas de la región, de esta forma su población comienza a disminuir según el régimen del siguiente modelo:

$$p' = Ap - Bp^2. \tag{25}$$

donde supondremos que los nuevos valores de A y B saisfacen $Q > A/B$ $(A < a,\ B < b)$. La población comienza a recuperarse una vez que se alcanza la cantidad de q individuos, donde $q > A/B$, $q < Q$. En ese punto, la población vuelve a regirse por el modelo (24), hasta que en el futuro vuelve a verse afectada nuevamente por el cambio climático, generando una fluctuación de la cantidad de habitantes periódica en el tiempo. Si denotamos por T al período del ciclo, es decir al tiempo transcurrido entre que la población alcanza el valor Q luego vuelve a alcanzar dicho valor (o equivalentemente, alcanza el valor q y luego vuelve a tomar el valor q) muestre que

$$T = \frac{1}{a} \ln \left[\frac{Q}{q} \left(\frac{a - bq}{a - Qb} \right) \right] + \frac{1}{A} \ln \left[\frac{q}{Q} \left(\frac{A - BQ}{A - qB} \right) \right]$$

Verficar además que $T > 0$ según los datos del problema.

Solución: Procedemos a resolver la EDO (24) mediante variables separables o Bernoulli. Por Bernoulli se tiene el cambio de variable

$$z = p^{-1} \Rightarrow z' = -\frac{p'}{p^2} \tag{26}$$

Reordenando (24) y reemplazando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{p'}{p^2} &= \frac{a}{p} - b \\ -z' &= az - b \\ z' + az &= b \end{aligned} \tag{27}$$

Ocupando el factor integrante $u = e^{\int a dt} = e^{at}$ se tiene

$$\begin{aligned} (ze^{at})' &= be^{at} \\ z(t) &= \frac{b}{a} + ce^{-at}; \quad z(0) = \frac{1}{q} \\ z(t) &= \frac{b}{a} + \frac{a - bq}{aq} e^{-at} \\ P(t) &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a - bq}{aq} e^{-at}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{28}$$

donde la solución es simétrica para la EDO en (25). Luego, el tiempo a calcular es $T_T = T_1 + T_2$, donde T_1 es el tiempo de disminución de q a Q en el modelo (24) y T_2 es el tiempo de crecimiento de Q a q en el modelo (25). Así, tenemos para T_1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} &= \frac{b}{a} + \frac{a - bq}{aq} e^{-aT_1} \\ \frac{a - bQ}{aQ} &= \frac{a - bq}{aq} e^{-aT_1} \\ \frac{q}{Q} \frac{a - bQ}{a - bq} &= e^{-aT_1} \\ T_1 &= \frac{1}{a} \ln\left(\frac{Q}{q} \frac{a - bq}{a - bQ}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

Luego, para T_2 el procedimiento es análogo por la simetría de los modelos, por lo que basta realizar el cambio $T_1 \to T_2$, $Q \iff q$, $a \to A$ y $b \to B$. Así, T_2 queda definido como

$$T_2 = \frac{1}{A} \ln\left(\frac{q}{Q} \frac{A - BQ}{A - Bq}\right) \tag{30}$$

Así, realizando la suma de ambos T_1 y T_2, se obtiene

$$T_t = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{Q}{q} \frac{a - bq}{a - bQ}\right) + \frac{1}{A} \ln\left(\frac{q}{Q} \frac{A - BQ}{A - Bq}\right) \blacksquare \tag{31}$$

Finalmente, la expresión es estrictamente positiva, debido a que $\frac{Q}{q}\frac{a-bq}{a-bQ} > 1 \wedge \frac{q}{Q}\frac{A-BQ}{A-Bq} > 1$, ya que $\frac{a}{b} > Q > q > \frac{A}{B}$.

Puntaje:

- (1 pto.) Aplica Bernoulli o variables separables para obtener (28).
- (0,8 pts.) Calcula el tiempo de demora T_1 en (29).
- (0,8 pts.) Calcula el tiempo de demora T_2 o argumenta que es el mismo que T_1 con el cambio de constantes, argumentando correctamente por simetría de modelos.
- (0,2 pts.) Obtiene la expresión pedida (31).
- (0,2 pts.) Verifica que (31)> 0.

P3.-

Parte A

Para $x > 0$ considere la ecuación de Ricatti

$$y' + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)y = -\frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3) \tag{32}$$

1. (1.5 puntos) Considere $y_p(x) = e^{2x}(ax+b)$, determinar a, b para que esta sea solución particular de (32).

Solución: Se tiene que la solución particular y_p está definida como

$$y_p = e^{2x}(ax+b) \wedge y_p' = 2e^{2x}(ax+b) + e^{2x}a \tag{33}$$

Luego, reemplazando la solución en (32), obtenemos

$$\begin{aligned}
&2e^{2x}(ax+b) + ae^{2x} + e^{-2x}[e^{2x}(ax+b)]^2 \\
&\qquad -\frac{1}{x}(1+4x+2x^2)e^{2x}(ax+b) = \frac{-e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3) \\
&e^{2x}(2ax^2+2bx+ax+a^2x^3+2abx^2+b^2x \\
&\qquad -ax-4ax^2-2ax^3-b-4bx-2bx^2) = e^{2x}(-1-x-2x^2-x^3) \\
&x^3(a^2-2a) + x^2(2ab-2a-2b) + x(b^2-2b) - b = -1-x-2x^2-x^3
\end{aligned} \tag{34}$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema siguiente

$$\begin{aligned}
a^2 - 2a &= -1 \\
2ab - 2a - 2b &= -2 \\
b^2 - 2b &= -1 \\
-b &= -1
\end{aligned} \tag{35}$$

de donde se obtiene que $a = 1 \wedge b = 1$, por lo que la solución particular es

$$y_p(x) = e^{2x}(x+1)\blacksquare \tag{36}$$

Puntaje:

- (0,5 pts.) Establece el cambio en (33).
- (0,5 pts.) Reemplaza en (32) y obtiene (34)
- (0,5 pts.) Resuelve el sistema en (35), determina a y b, y obtiene (36).

2. (1.5 pts.) Calcular la solución general de la ecuación (32).

Solución: Como la EDO es de Ricatti, utilizamos el cambio de variable $y = y_1 + 1/z$, con $y_1 = e^{2x}(x+1)$ solución particular encontrada en la parte anterior. De esta forma obtenemos

$$y = e^{2x}(x+1) + \frac{1}{z} \wedge y' = e^{2x}(2x+3) - \frac{z'}{z^2} \tag{37}$$

Luego, reemplazando se tiene

$$\begin{aligned} e^{2x}(2x+3) - \frac{z'}{z^2} &= -e^{-2x}(e^{2x}(x+1) + \frac{1}{z})^2 \\ &\quad + \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)(e^{2x}(x+1)+\frac{1}{z}) - \frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3) \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \frac{z'}{z^2} &= e^{2x}(2x+3+x^2+2x+1+\frac{x^3+2x^2+x+1}{x} \\ &\quad - \frac{2x^3+4x^2+x+2x^2+4x+1}{x}) + \frac{2(x+1)}{z} + \frac{e^{-2x}}{z^2} - \frac{2x^3+4x+1}{xz} \end{aligned} \tag{39}$$

$$\frac{z'}{z^2} = e^{2x}(x^2+4x+4-x^2-4x-4) + \frac{2(x+1)}{z} + \frac{e^{-2x}}{z^2} - \frac{2x^3+4x+1}{xz} \tag{40}$$

$$z' = z\Big(\frac{2x^2+2x-2x^2-4x-1}{x}\Big) + e^{-2x} \tag{41}$$

$$z' + \Big(\frac{2x+1}{x}\Big)z = e^{-2x} \tag{42}$$

donde llegamos a una EDO lineal de primer orden. Procedemos según factor integrante, donde

$$u = e^{\int \frac{2x+1}{x}dx} = e^{2x+ln|x|} = xe^{2x} \quad x > 0 \tag{43}$$

de esta forma, se resuelve la EDO como

$$\begin{aligned} (zxe^{2x})' &= e^{-2x}xe^{2x} \\ zxe^{2x} &= \int x dx \\ z &= \frac{x^2+2c}{2xe^{2x}} \end{aligned} \tag{44}$$

obteniendo la solución explícita de la EDO para z. Finalmente, reemplazando z en $y = e^{2x}(x+1) + \frac{1}{z}$ se obtiene

$$y = e^{2x}(x+1) + \frac{2xe^{2x}}{x^2+2c}, \quad c \in \mathbb{R}\blacksquare \tag{45}$$

Puntaje:

- (0,3 pts.) Establece el cambio de variable (37) acorde a una EDO de Ricatti.
- (0,8 pts.) Reemplazar el cambio en (32) y obtener (42).
- (0,2 pts.) Calcula el factor integrante apropiado para resolver (42).
- (0,2 pts.) Obtiene (44), devuelve el cambio de manera apropiada, y obtiene (45).

Parte B

Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas de período T, es decir $a(x+T) = a(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, lo mismo para b. Considere la EDO lineal de primer orden

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{46}$$

1. (2 puntos) Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una solución de (46). Demostrar que u es T periódica si y sólo si $u(0) = u(T)$.
   Ind: Para el implica $\Leftarrow$, defina la función $\varphi(x) = u(x+T) - u(x)$ determinando la EDO que satisface y luego aplicar adecuadamente TEU para concluir.

Solución: Sea u una solución de (46), la cual existe por el factor integrante (conocemos su forma) y dada cualquier condición inicial TEU nos da unicidad. Demostremos lo pedido estudiando cada implicancia:

$\Rightarrow$: Trivial.

$\Leftarrow$: Definamos $x \to \Phi(x) = u(x+T) - u(x)$ veamos que Φ satisface una EDO asociada a (46). Como a y b funciones periódicas de período T, se tiene:

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= u'(x+T) - u'(x) && (47)\\
\Phi'(x) &= a(x+T)u(x+T) + b(x+T) - a(x)u(x) - b(x)\\
\Phi'(x) &= a(x)u(x+T) + b(x) - a(x)u(x) - b(x)\\
\Phi'(x) &= a(x)(u(x+T) - u(x))\\
\Phi'(x) &= a(x)\Phi(x) && (48)
\end{aligned}$$

Además se tiene que $\Phi(0) = u(0+T) - u(0) = 0$ (por hipótesis). Así, se tiene que el problema de Cauchy para Φ a resolver es

$$(PC) \begin{cases} \Phi'(x) = a(x)\Phi(x) \\ \Phi(0) = 0 \end{cases} \tag{49}$$

Apliquemos TEU para mostrar que Φ es nula en todo $\mathbb{R}$. Notemos que $f(x,\Phi) = a(x)\Phi$ es continua en x ya que $a(x)$ es una función conocidamente continua en $\mathbb{R}$. Luego, probemos Lipschitz en Φ, como $|\frac{\partial f}{\partial y}| = |a(x)|$, se suficiente con acotar globalmente este término. Como $a(x)$ es continua por Bolzano se tiene

$$M_T = \max_{x\in[0,T]} a(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} a(x) < \infty \tag{50}$$

$$m_T = \min_{x\in[0,T]} a(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} a(x) < \infty \tag{51}$$

ya que $[0,T]$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, por tal razón dichas cotas existen y son finitas, ahora debido a la periodicidad de $a(x)$ se extienden globalmente a $\mathbb{R}$ (se alcanzan al menos una vez por período). Así:

$$|a(x)| \leq \max(|m_T|, |M_T|) < \infty \tag{52}$$

Por lo tanto, f es globalmente Lipschitz en Φ y el (49) posee única solución para todo x real (ie se aplica TEU global). Finalmente, se cumple que $u(x+T) = u(x)$, por lo que u es T periódica.

Puntaje:

- (0,2 pts.) Enuncia trivalidad o demuestra $\Rightarrow$
- (0,4 pts.) Para $\Leftarrow$ define una nueva función Φ en base a u y plantea (47).
- (0,5 pts.) Obtiene (48) y ocupa hipótesis para formar condición inicial del nuevo (PC) en (49).
- (0,2 pts.) Determina el problema de Cauchy a resolver en (49).
- (0,5 pts.) Establece continuidad de la primera variable. Luego, demuestra Lipschitz acotando apropiadamente usando Bolzano y obteniendo (51).
- (0,2 pts.) Con el procedimiento realizado, concluye apropiadamente.

2. (1 punto) En el caso homogéneo en (46), esto es $b(x) = 0$ en todo $\mathbb{R}$, usar la parte anterior para encontrar una condición que asegure que dicha EDO tenga soluciones T períodicas.

Solución: Sea $b(x) = 0$, por lo que la EDO queda definida como

$$y' = a(x)y \tag{53}$$

la que por TEU global (caso particular de la parte anterior) con condición inicial y(0) conocida posee una única solución def en todo $\mathbb{R}$. Aún más, por variables separables se tiene explícitamente que

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx$$

$$y(x) = y(0)e^{\int_0^x a(s)ds} \tag{54}$$

Luego, se tiene por la parte anterior que u es solución T periódica si $u(0) = u(T)$, para tal condición entonces se tienen dos casos:

$$y(0) = y(T) = \begin{cases} = 0 \\ \\ \neq 0 \end{cases} \tag{55}$$

Caso $y(0) = 0$: La demostración es trivial: Sea $y(0) = y(T) = 0$

$$y(T) - y(0) = 0 \iff y(0+T) - y(0) = 0 \iff y(0+T) = y(0) \tag{56}$$

Caso $y(0) \neq 0$: Nos fijamos en la integral desconocida: Sea $y(0) = y(T) \neq 0$

$$\Rightarrow \int_0^T a(s)ds = 0 \tag{57}$$

De esta forma (57) es una condición que implica que $y(0) = y(T)$ y por ende la EDO en (53) posee soluciones T periódicas.

Puntaje:

- (0,2 pts.) Establece el caso homogéneo en (53).
- (0,3 pts.) Mediante variables separables obtiene (54) la solución en términos de una integral de $a(s)$.
- (0,2 pts.) Establece y demuestra según (56) el caso $y(0) = y(T) = 0$.
- (0,3 pts.) Establece (57) el caso $y(0) = y(T) \neq 0$ y obtiene la condición pedida.