Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones 2021 - 2do Semestre

Profesores: C. Conca, A. Hernández, A. Fuentes, R. Gormaz, A. Sepúlveda y A. Frank

PAUTA TAREA 1

P1. Considere el conjunto $\Omega = [-1,1] \times [0,+\infty[\times [0,2\pi[$ y defina el cambio de coordenadas $\vec{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{r}(u,v,w) = \left(\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2}\cos(w), \sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2}\operatorname{sen}(w), uv\right). \tag{1}$$

a) (0,5 pts.) Sean $C_1 = \{(u,v,w) \in \Omega \mid u = \pm 1\}$ y $C_2 = \{(u,v,w) \in \Omega \mid v = 0\}$. Muestre que el cambio de coordenadas $\vec{r}$ no es inyectivo ni en C_1 ni en C_2.

Solución: Para mostrar que $\vec{r}$ no es inyectivo en C_1 basta encontrar dos elementos en C_1 con la misma imagen. Sea $(u_0,v_0,w_0) \in C_1$, entonces $\vec{r}(u_0,v_0,w_0) = (0,0,\pm v_0)$ y por lo tanto

$$\vec{r}(1,0,w_1) = \vec{r}(-1,0,w_2) = (0,0,0)$$

donde $w_1, w_2 \in [0,2\pi[$ pueden ser cualquiera.
Para mostrar que $\vec{r}$ no es inyectivo en C_2 basta encontrar dos elementos en C_2 con la misma imagen. Notamos que si $(u_0,v_0,w_0) \in C_2$ entonces $v_0 = 0$ y

$$\vec{r}(u_0,v_0,w_0) = \left(\sqrt{1-u_0^2}\cos(w_0), \sqrt{1-u_0^2}\operatorname{sen}(w_0), 0\right).$$

Tomando, por ejemplo, $(1/2,0,w_0)$ y $(-1/2,0,w_0)$ que están en C_2, tenemos

$$\vec{r}(1/2,0,w_0) = \vec{r}(-1/2,0,w_0) = (\sqrt{3}\cos(w_0)/2, \sqrt{3}\operatorname{sen}(w_0)/2, 0),$$

donde $w_0 \in [0,2\pi[$ puede ser cualquiera.
Por lo tanto $\vec{r}$ no es inyectivo en C_1 y tampoco en C_2 ✓.

Distribución de puntajes:

- Mostrar dos elementos distintos en C_1 con misma imagen (0,2 pts)
- Mostrar dos elementos distintos en C_2 con misma imagen (0,2 pts)
- Todos los cálculos correctos y conclusión coherente (0,1 pts)

b) (1,0 pts.) Sea $C_3 = \{(u,v,w) \in \Omega \mid u = 0 \text{ y } v = 0\}$. Muestre que los vectores $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ y $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ son ortogonales en $\Omega \setminus (C_1 \cup C_3)$, y que la matriz Jacobiana de $\vec{r}$ es invertible en dicho conjunto.

Solución: Las funciones coordenadas de $\vec{r}$, $r_1(u,v,w) = \sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2}\cos(w)$, $r_2(u,v,w) = \sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2}\,\mathrm{sen}(w)$ son diferenciables en $\Omega\setminus C_1$ y $r_3(u,v,w) = uv$ en todo el espacio, luego $\vec{r}$ es diferenciable en $\Omega \setminus C_1$.
Para (u,v,w) en $\Omega \setminus C_1$ tenemos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1+v^2}\cos(w), \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1+v^2}\,\mathrm{sen}(w), v\right)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{1-u^2}\cos(w), \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{sen}(w), u\right)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \left(-\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2}\,\mathrm{sen}(w), \sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2}\cos(w), 0\right).$$

Ahora verificamos ortogonalidad calculando cada producto interno (o producto punto)

$$\left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\rangle = -uv^2cos^2(w) - uv^2\,\mathrm{sen}^2(w) + uv = 0. \checkmark$$
$$\left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\rangle = -v(1-u^2)\,\mathrm{sen}(w)\cos(w) + v(1-u^2)\,\mathrm{sen}(w)\cos(w) + 0 = 0. \checkmark$$
$$\left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\rangle = u(1+v^2)\,\mathrm{sen}(w)\cos(w) - u(1+v^2)\,\mathrm{sen}(w)\cos(w) + 0 = 0. \checkmark$$

Para $(u,v,w) \in C_3$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0,0,0)$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = (-\,\mathrm{sen}(w), \cos(w), 0)$ y luego no son linealmente independientes. Por lo tanto la matriz jacobiana

$$D\vec{r}(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1+v^2}\cos(w) & \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{1-u^2}\cos(w) & -\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2}\,\mathrm{sen}(w) \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1+v^2}\,\mathrm{sen}(w) & \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{sen}(w) & \sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2}\cos(w) \\ v & u & 0 \end{bmatrix}.$$

se puede calcular y es invertible (pues sus columnas son ortogonales no nulas, y por lo tanto linealmente independientes) en $\Omega \setminus (C_1 \cup C_3)$.

Distribución de puntajes:

- Calcular correctamente $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ (0,4 pts)
- Chequea que los tres vectores son ortogonales (0,3 pts)
- Expresa la matriz Jacobiana (0,1 pts)
- Nota que las columnas de la matriz son ortogonales y no nulas en $\Omega \setminus (C_1 \cup C_3)$ y concluye que es invertible en dicho conjunto
  [Alternativamente, puede determinar la invertibilidad de la matriz por otros métodos] (0,2 pts)

c) (0,5 pts.) Calcule las magnitudes h_u, h_v y h_w de los vectores considerados en la parte anterior.

Solución: De lo anterior, los factores de escala h_u, h_v y h_w están bien definidos en

$\Omega \setminus C_1$. Calculemos cada uno

$$\begin{aligned}
h_u &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\| = \left(\frac{u^2(1+v^2)}{1-u^2} \cos^2(w) + \frac{u^2(1+v^2)}{1-u^2} \operatorname{sen}^2(w) + v^2 \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{u^2+v^2}{1-u^2}}. \\
h_v &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \left(\frac{v^2(1-u^2)}{1+v^2} \cos^2(w) + \frac{v^2(1-u^2)}{1+v^2} \operatorname{sen}^2(w) + u^2 \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{u^2+v^2}{1+v^2}}. \\
h_w &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\| = \Big((1-u^2)(1+v^2) \operatorname{sen}^2(w) + (1-u^2)(1+v^2) \cos^2(w) \Big)^{1/2} \\
&= \sqrt{(1-u^2)(1+v^2)}.
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- Entiende la relación entre las magnitudes h's y las derivadas parciales de $\vec{r}$ (0,2 pts)
- Calcular coherentemente h_u, h_v y h_w a partir de las derivadas parciales de $\vec{r}$ (0,3 pts)

d) (1,0 pts.) Calcule $\hat{u}$, $\hat{v}$ y $\hat{w}$ en $\Omega \setminus (C_1 \cup C_3)$ y muestre que forman un triedro ortonormal ordenado. ¿Es posible definir estos vectores en $\Omega \setminus C_3$?

Solución: De la parte anterior, los factores de escala están bien definidos y son no nulos en $\Omega \setminus (C_1 \cup C_3)$. Los miembros del triedro $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ quedan

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \sqrt{\frac{1-u^2}{u^2+v^2}} \left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1+v^2} \cos(w), \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1+v^2} \operatorname{sen}(w), v \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \left(-u\sqrt{1+v^2} \cos(w), -u\sqrt{1+v^2} \operatorname{sen}(w), v\sqrt{1-u^2} \right) \\
\hat{v} &= \sqrt{\frac{1+v^2}{u^2+v^2}} \left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \sqrt{1-u^2} \cos(w), \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \sqrt{1-u^2} \operatorname{sen}(w), u \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \left(v\sqrt{1-u^2} \cos(w), v\sqrt{1-u^2} \operatorname{sen}(w), u\sqrt{1+v^2} \right). \\
\hat{w} &= \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1+v^2)}} \left(-\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2} \operatorname{sen}(w), \sqrt{1-u^2}\sqrt{1+v^2} \cos(w), 0 \right) \\
&= \left(-\operatorname{sen}(w), \cos(w), 0 \right).
\end{aligned}$$

Hasta ahora el triedro es ortonormal. Para ver que es ordenado basta chequear que se cumple una de las siguientes tres igualdades:

$$\hat{u} \times \hat{v} = \hat{w}, \hat{v} \times \hat{w} = \hat{u} \ \text{ ó } \ \hat{w} \times \hat{u} = \hat{v}.$$

Por ejemplo

$$\hat{u}\times\hat{v} = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -u\sqrt{1+v^2}\cos(w) & -u\sqrt{1+v^2}\operatorname{sen}(w) & v\sqrt{1-u^2} \\ v\sqrt{1-u^2}\cos(w) & v\sqrt{1-u^2}\operatorname{sen}(w) & u\sqrt{1+v^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}\Big(-u^2(1+v^2)\operatorname{sen}(w) - v^2(1-u^2)\operatorname{sen}(w),$$

$$v^2(1-u^2)\cos(w) + u^2(1+u^2)\cos(w), 0\Big)$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}\left(-(u^2+v^2)\operatorname{sen}(w), (u^2+v^2)\cos(w), 0\right)$$

$$= (-\operatorname{sen}(w), \cos(w), 0) = \hat{w}. \checkmark$$

Se concluye entonces que $\{\hat{u},\hat{v},\hat{w}\}$ es un triedro ortonormal ordenado.
En $\Omega\backslash C_3$ son nulos h_u y h_w, y por lo tanto no están definidos los vectores tangentes. Sin embargo las expresiones $\hat{u},\hat{v}$ y $\hat{w}$ sí se pueden definir ahí.

Distribución de puntajes:

- Calcular correctamente los vectores unitarios (0,3 pts)
- Concluye que es un triedro ortonormal (0,1 pts)
- Determina un modo para chequear que es un triedro ordenado (0,2 pts)
- Calcula consistentemente y concluye que es un triedro ordenado (0,2 pts)
- Analiza si los vectores unitarios se pueden definir en $\Omega\setminus C_3$ (0,2 pts)

P2. *a)* (1,0 pts.) Considere el campo escalar g, dado en las coordenadas introducidas en (1) por

$$g(u,v,w) := g(\vec{r}(u,v,w)) = \frac{2}{v^2}.$$

Calcule ∇g en estas coordenadas.

Solución: Aprovechando que el campo escalar ya está en las nuevas coordenadas, usamos directamente la expresión para el gradiente en dichas coordenadas, es decir

$$\nabla g = \frac{1}{h_u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\hat{u} + \frac{1}{h_v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\hat{v} + \frac{1}{h_w}\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)\hat{w}.$$

Ciertamente g es diferenciable en $\{(u,v,w)\in\Omega\setminus(C_1\cup C_3) : v\neq 0\}$, además se tiene que $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial w} = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{4}{v^3}$. Entonces

$$\nabla g = \frac{1}{h_v}\left(-\frac{4}{v^3}\right)\hat{v}$$

$$= -\frac{4}{v^3}\sqrt{\frac{1+v^2}{u^2+v^2}}\hat{v}$$

(o equivalentemente $\nabla g = -\frac{4}{v^3}\sqrt{\frac{1+v^2}{u^2+v^2}}\left(v\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1+v^2}}\cos(w), v\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1+v^2}}\operatorname{sen}(w), u\right)$)

Distribución de puntajes:

- Usar correctamente la fórmula del gradiente en coordenadas ortogonales (0,5 pts)
- Calcula las derivadas parciales correctamente (0,3 pts)
- Reemplaza correctamente (0,2 pts)

b) Considere el campo vectorial $\vec{G}$, escrito en las coordenadas introducidas en (1) como

$$\vec{G}(u,v,w) := \vec{G}(\vec{r}(u,v,w)) = v\sqrt{1-u^2}\hat{u} + u\sqrt{1+v^2}\hat{v} - \hat{w}.$$

I. (1,5 pts.) Calcule $\text{rot}(\vec{G})$ en estas coordenadas.

Solución: Primero notemos que este campo $\vec{G}$ esta bien definido y es diferenciable en $\Omega \setminus (C_1 \cup C_3)$ y sus funciones componentes son

$$G_u = \vec{G}\cdot\hat{u} = v\sqrt{1-u^2},\ G_v = \vec{G}\cdot\hat{v} = u\sqrt{1+v^2},\ G_w = \vec{G}\cdot\hat{w} = -1.$$

Las cantidades

$$\begin{aligned} G_u h_u &= v\sqrt{u^2+v^2} \\ G_v h_v &= u\sqrt{u^2+v^2} \\ G_w h_w &= -\sqrt{(1-u^2)(1+v^2)} \end{aligned}$$

se utilizarán en el cálculo del rotor:

$$\begin{aligned} rot(\vec{G}) &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ G_u h_u & G_v h_v & G_w h_w \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(G_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(G_v h_v)\right]\hat{u} \\ &\quad + \frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(G_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(G_w h_w)\right]\hat{v} \\ &\quad + \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(G_v h_v) - \frac{\partial}{\partial v}(G_u h_u)\right]\hat{w} \\ &= \frac{1}{h_v h_w}\left(-v\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1+v^2}}\right)\hat{u} + \frac{1}{h_u h_w}\left(-u\frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-u^2}}\right)\hat{v} \\ &\quad + \frac{1}{h_u h_v}\left(\frac{u^2-v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\hat{w} \\ &= -\frac{v}{\sqrt{1+v^2}\sqrt{u^2+v^2}}\hat{u} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{u^2+v^2}}\hat{v} \\ &\quad + \frac{(u^2-v^2)\sqrt{(1-u^2)(1+v^2)}}{(u^2+v^2)^{3/2}}\hat{w} \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- Reconoce las componentes G_u, G_v y G_w (0,3 pts)
- Usa correctamente la expresión para el rotor en coordenadas ortogonales

(0,6 pts)

- Calcula correctamente los coeficientes del rotor (0,6 pts)

II. (0,5 pts.) Muestre que $\overrightarrow{G}$ no es conservativo.

Solución: De la parte anterior se tiene que $rot(\overrightarrow{G}) \neq \overrightarrow{0}$ en $\Omega \setminus (C_1 \cup C_3)$. Como es continuamente diferenciable en ese dominio, si fuera conservativo se obtendría $rot(\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{0}$, una contradicción. Por lo tanto no puede ser conservativo.

Distribución de puntajes:

- Explicita que el rotor no es nulo y es $\mathcal{C}^1$ en su dominio (0,2 pts)
- Argumenta coherentemente a partir de esto que el campo vectorial $\overrightarrow{G}$ no es conservativo (0,3 pts)