

## MA1101: Introducción al Álgebra

## Pauta Tarea 1

**P1.** Determine si las siguientes afirmaciones son tautologías, sin usar tablas de verdad.

a)  $(p \implies \overline{p \vee q}) \Leftrightarrow \bar{p}$

*Solución usando el método simbólico:*  $(p \implies \overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (p \implies (\bar{p} \wedge q)) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee (\bar{p} \wedge q)) \Leftrightarrow \bar{p}$  donde se usaron la ley de Morgan, caracterización de la implicancia, absorción. Una otra posibilidad es usar una demostración exploratoria.

b)  $(p \implies q) \Leftrightarrow [(\bar{q} \wedge p) \vee (q \implies p)]$

c)  $[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \implies [(p \wedge r) \implies (q \wedge s)]$

**P2.** Demuestre las siguientes afirmaciones, indicando cuál método de demostración se usó:

a) Todo entero al cuadrado tiene la forma  $3k$  o  $3k + 1$ , con  $k \in \mathbb{N}$ .

(Puede usar, sin demostrar, que todo entero se escribe de la forma  $3q + r$ , con  $q$  entero y  $r \in \{0, 1, 2\}$ .)

b) Para  $a$  entero, si  $3a^2 + 1$  es par, entonces  $a$  es impar.

*Solución:* Usaremos la contrarrecíproca. Entonces tenemos que mostrar que si  $a$  no es impar, entonces  $3a^2 + 1$  no es par. En otras palabras, la meta es probar que si  $a$  es par, entonces  $3a^2 + 1$  es impar. Notamos que si  $a$  es par, entonces  $a^2$  es par, y también  $3a^2$  es par, y por lo tanto  $3a^2 + 1$  es impar, que es lo que queríamos mostrar. Es también posible mostrar lo pedido usando una reducción al absurdo, o una demostración directa.

c) Sea  $a \neq 0$  un número racional y  $b$  un número irracional (no racional), donde un número racional es aquel que se puede escribir de la forma  $\frac{m}{n}$ , con  $m, n$  enteros,  $n \neq 0$ . Demuestre que  $a + b$  es irracional.

*Solución:* Usaremos la contradicción o reducción al absurdo. Para esto, asumimos que  $a \neq 0$  y  $a + b$  son racionales y  $b$  es irracional. Siendo racionales,  $a = \frac{n}{m}$  y  $a + b = \frac{n'}{m'}$  donde  $n, n', m, m'$  son enteros con  $m, m' \neq 0$ . Notamos que  $b = (a + b) - a = \frac{n'}{m'} - \frac{n}{m} = \frac{n'm + nm'}{mm'}$ . Es decir, tomando  $n'' := n'm + nm'$  y  $m'' := mm'$ , el irracional  $b$  se puede escribir como  $b = \frac{n''}{m''}$  con  $n'', m''$  enteros y  $m'' \neq 0$ , lo que es una contradicción.

**P3.** Sea  $F$  el conjunto de personas que se encuentra esperando en una fila. Para dos personas  $x, y$  en  $F$ , se define la función proposicional

$$\phi(x, y) = \text{“La persona } x \text{ está más adelante que } y \text{ en la fila.”}$$

a) Determine en qué lugar de la fila se encuentran  $p, q$  en los siguientes casos, explicando su respuesta:

1)  $(\forall x \in F)(\phi(p, x) \vee x = p)$ .

2)  $(\forall x \in F)(\phi(x, q) \vee x = q)$ .

¿Es importante la parte  $\dots \vee x = p$  en 1), y  $\dots \vee x = q$  en 2)?

b) De forma similar a los casos de a), escriba la situación “hay al menos dos personas en la fila delante de  $p$ ”.