UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2020
MA2601 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PROFS: Alexis Fuentes, Axel Osses, Alexander Frank, Roberto Morales, Ariel Perez, Javier Ramírez
FECHA: Jueves 30 Julio, 9:00 a 15:00 HRS.

Examen de primera instancia

IMPORTANTE: Debe escoger y entregar sólo una de las preguntas P1 y P2. La pregunta P3 es obligatoria.

P1. 1. **(2 puntos)** Resuelva la ecuación

$$y' = \frac{2x+y}{3x-y}, \quad x > 0.$$

Solución: Denotemos $f(x,y) := \frac{2x+y}{3x-y}$. Notemos que para $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda x + \lambda y}{3\lambda x - \lambda y} = \frac{2x+y}{3x-y} = f(x,y). \tag{1}$$

Lo anterior nos dice que debemos resolver una ecuación del tipo homogénea. Para esto consideramos el cambio de variable $y = zx \Longrightarrow y' = z'x + z$. De esta forma la ecuación diferencial toma la forma

$$z'x + z = \frac{2x+zx}{3x-zx}. \tag{2}$$

Equivalentemente

$$\frac{(3-z)}{z^2-2z+2} z' = \frac{1}{x}, \text{ siempre que } x \neq 0. \tag{3}$$

Integrando la ecuación (3) se sigue que

$$\int \frac{3-z}{z^2-2z+2} dz = \int \frac{1}{x} dx + C. \tag{4}$$

Ya que

$$\begin{aligned}
\int \frac{3-z}{z^2-2z+2} dz &= \int \frac{3-z}{z^2-2z+2} dz \\
&= \int \frac{3-z}{(z-1)^2+1} dz \\
&\underbrace{=}_{u=z-1} \int \frac{2-u}{u^2+1} du \\
&= \int \frac{2}{u^2+1} du - \int \frac{u}{u^2+1} du \\
&= 2\arctan(u) - \frac{1}{2}\ln\left(|u^2+1|\right) \\
&= 2\arctan(z-1) - \frac{1}{2}\ln\left(|(z-1)^2+1|\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

de (4) obtemos que z verifica

$$2\arctan(z-1) - \frac{1}{2}\ln\left((z-1)^2+1\right) = \ln(x) + C. \tag{6}$$

En conclusión, la solución y de nuestra ecuación diferencial es tal que

$$2\arctan\left(\frac{y}{x}-1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}-1\right)^2+1\right) = \ln(x) + C. \tag{7}$$

Puntaje:

- Identifica que es una ecuación del tipo homogénea. (0,5 pt.).
- Realiza el cambio de variable $y = zx$ y obtiene (3). (0,5 pt.).
- Obtiene (6). $(0,5$ pt.$)$.
- Obtiene (7) $(0,5$ pt.$)$.

2. Sean a, b dos funciones continuas en un intervalo I. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \text{ en } I, \tag{8}$$

a) **(2 puntos)** Encuentre una función p derivable y extrictamente positiva en I tal que (8) se puede escribir como

$$(py')' + bpy = 0,$$

Solución:
Alternativa 1: Queremos hallar p, diferenciable en I, tal que

$$(p(x)y'(x))' + b(x)p(x)y(x) = 0. \tag{9}$$

Equivalentemente, p debe verificar

$$p'(x)y'(x) + p(x)y''(x) + b(x)p(x)y(x) = 0. \tag{10}$$

Como $p(x) > 0$ en I, obtenemos de la ecuación anterior

$$y''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}y'(x) + b(x)y(x) = 0. \tag{11}$$

Comparando las ecuaciones (11) y (8) notamos que p debe ser tal que

$$a(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}. \tag{12}$$

Integrando esta última igualdad se concluye que

$$p(x) = C\exp\left(\int a(x)dx\right), \tag{13}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es constante.

Alternativa 2:
Motivados por el uso del factor integrante en el caso de ecuaciones lineales de primer orden, proponemos

$$p(x) := \exp\left(\int a(x)dx\right). \tag{14}$$

En este caso

$$\big(p(x)y'(x)\big)' = p'(x)y'(x) + p(x)y''(x) = p(x)a(x)y'(x) + p(x)y''(x). \tag{15}$$

Por lo tanto, al multiplicar la ecuación (8) por $p(x) := \exp\left(\int a(x)dx\right)$ se obtiene lo solicitado.

Puntaje: Alternativa 1:

- Obtiene (11). (0,5 pt.).
- Obtiene (12). (0,5 pt.).
- Concluye que p está dada por (13). (1 pt.).

Alternativa 2:

- Propone p. (1 pt.).
- Verifica que cumple con lo pedido. (1 pt.).

b) **(2 puntos)** Suponga que $b(x)p^2(x) = A$, para cada $x \in I$ con A una constante. Demostrar que si y es una solución de la ecuación (8), entonces la función

$$E(x) = (py')^2 + Ay^2, \quad x \in I$$

es constante en I.

Solución:
Alternativa 1:
Derivando E tenemos

$$E'(x) = 2p(x)y'(x)\left(p(x)y'(x)\right)' + 2Ay(x)y'(x) \tag{16}$$

Del ítem anterior, para $p(x) = \exp\left(\int a(x)dx\right)$, tenemos que

$$(p(x)y'(x))' = -b(x)p(x)y(x). \tag{17}$$

Así, reemplazando (17) en (16) obtenemos

$$E'(x) = -2b(x)(p(x))^2y(x)y'(x) + 2Ay(x)y'(x) = 0, \tag{18}$$

ya que $b(x)(p(x))^2 = A$. Por lo tanto E es constante en I.

Alternativa 2: Del ítem anterior tenemos que para y, solución de (8), podemos escribir

$$\big(p(x)y'(x)\big)' + b(x)p(x)y(x) = 0, \tag{19}$$

para cierta función p diferenciable. Ahora, si multiplicamos esta última igualdad por p obtenemos

$$p(x)\left(p(x)y'(x)\right)' + Ay(x) = 0, \tag{20}$$

ya que $A = b(x)p^2(x)$. Esto nos permite concluir que

$$\begin{aligned} E'(x) =& 2p(x)y'(x)\left(p(x)y'(x)\right)' + 2Ay(x)y'(x) \\ =& 2y'(x)\Big(p(x)\left(p(x)y'(x)\right)' + Ay(x)\Big) \\ =& 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Y por tanto E es constante en I.

Puntaje: Alternativa 1:

- Por obtener (16). (1 pt.).
- Usa (17) para concluir que $E' = 0$. (1 pt.).

Alternativa 2:

- Por obtener (20). (1 pt.).
- Por obtener E' y verificar que es nula. (1 pt.).

P2. Considere el sistema lineal de ecuaciones

$$X'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

1. **(2 puntos)** Encuentre la solución del sistema homogéneo asociado.

Solución: Primero, notemos que

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^2(\lambda+1).$$

Por lo tanto, los valores propios de la matriz asociada al sistema son $\lambda = -2$ (de multiplicidad 2) y $\lambda = -1$. Por otro lado, los espacios propios pueden ser caracterizados como sigue:

$$V_{\lambda=-2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \quad V_{\lambda=-1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Alternativa 1: Por lo tanto, la solución del sistema homogéneo viene dada por:

$$\begin{aligned} X_h(t) =& c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \\ =& \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{C}. \end{aligned}$$

Alternativa 2: Consideremos las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución al problema homogéneo asociado viene dada por

$$X_h(t) = e^{tA}C = \underbrace{Pe^{tD}}_{\Phi(t)}\underbrace{P^{-1}C}_{\overline{C}} == \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{pmatrix}.,$$

donde $\overline{C}$ es otro vector de constantes arbitrarias.

Puntaje:

- Calcula los valores propios de la matriz asociada $(0,4$ pt.$)$.
- Calcula los vectores propios asociados $(1,2$ pt.$)$.
- Escribe la solución general del problema homogéneo $(0,4$ pt.$)$.

2. **(2 puntos)** Encuentre una solución particular del sistema.

Solución: La inversa de $\Phi(t)$ viene dada por

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ -e^{t} & 0 & -e^{t} \end{pmatrix}$$

Además, escribimos

$$B(t) = \begin{pmatrix} e^{-2s} \\ e^{-3s} \\ e^{-4s} \end{pmatrix}.$$

Alternativa 1: Utilizando la fórmula de variación de parámetros, la solución particular del sistema viene dada por:

$$\begin{aligned} X_p(t) =& \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds \\ =& \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + e^{-s} + e^{-2s} \\ -e^{-s} - e^{-3s} \end{pmatrix} ds \\ =& \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ te^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} \\ -te^{-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativa 2: Usando que $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \Phi(t)P^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
X_p(t) =& e^{tA}\int_0^t e^{-sA}B(s)ds\\
=&\Phi(t)P^{-1}\int_0^t P\Phi^{-1}(s)B(s)ds\\
=&\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)ds\\
=&\begin{pmatrix} te^{-2t} \\ te^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} \\ -te^{-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Puntaje:

- Calcula la inversa de Φ o alternativamente la de e^{tA} $(0,8$ pt.$)$.
- Calcula la solución particular $(1,2$ pt.$)$.

3. **(2 puntos)** Verifique que la solución general tiende al vector nulo cuando t tiende a infinito.

Solución: De lo anterior, tenemos que la solución general del sistema está dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ te^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} \\ -te^{-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, dado que todos los términos tienen exponenciales negativas, tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- Escribe la solución general del sistema $(1,0$ pt.$)$.
- Calcula el límite pedido $(1,0$ pt.$)$.
- **Obs:** En caso que el alumno/a argumente que los valores propios son negativos y que la solución homogénea tiende al vector nulo, considerar $(0{,}5$ pt.$)$.

P3. (Obligatoria) Para $0 < \alpha < 1/2$, considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\,(1 - x - \alpha y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1 - 2x - y), \end{cases} \tag{22}$$

1. **(2 puntos)** Determine los puntos críticos (o de equilibrio) y la matriz Jacobiana o Diferencial del sistema asociado.

Solución: Llamamos $F(x,y) = x(1 - x - \alpha y)$ y $G(x,y) = y(1 - 2x - y)$. Notemos que si $x = 0$, entonces $y = 0$ o bien $y = 1$. Similarmente, si $y = 0$, entonces $x = 0$ o $x = 1$. A partir de este análisis, obtenemos los siguientes puntos críticos:

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (0, 1), \quad (x_3, y_3) = (1, 0).$$

Por otro lado, si imponemos

$$\begin{cases} 1 - x - \alpha y = 0 \\ 1 - 2x - y = 0, \end{cases}$$

obtenemos que la solución de este sistema de ecuaciones lineal es el punto crítico

$$(x_4, y_4) = \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}, -\frac{1}{1-2\alpha} \right).$$

Además, la matriz Jacobiana del sistema viene dada por

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \alpha y & -\alpha x \\ -2y & 1 - 2x - 2y \end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- Calcula los puntos críticos (0,3 pt. por cada punto crítico).
- Calcula la matriz Jacobiana o Diferencial (0,8 pt.)

2. **(2 puntos)** Calcule los valores propios (en función de α) de la matriz Jacobiana o Diferencial en los puntos críticos (o de equilibrio). Además, indique el tipo y estabilidad de cada punto crítico.

Solución:

- Para $(x_1, y_1) = (0, 0)$, tenemos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  En este caso los valores propios de $J(0, 0)$ son $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2. Por lo tanto, (x_1, y_1) es un nodo inestable.

- Para $(x_2, y_2) = (0, 1)$, tenemos

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

  en donde los valores propios de $J(0, 1)$ son $\lambda = 1 - \alpha$ y $\lambda = -1$. Dado que $\alpha < 1/2$, concluímos que (x_2, y_2) es un punto silla inestable.

- Para $(x_3, y_3) = (1, 0)$, tenemos

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

  en donde se obtiene que los valores propios de $J(1, 0)$ son $\lambda = -1$ (de multiplicidad 2). En este caso, (x_3, y_3) es un nodo estable.

- Para $(x_4, y_4) = \left(\dfrac{1-\alpha}{1-2\alpha}, -\dfrac{1}{1-2\alpha}\right)$, tenemos

$$J(x_4, y_4) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha-1}{1-2\alpha} & -\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{1-2\alpha} \\ \dfrac{2}{1-2\alpha} & \dfrac{1}{1-2\alpha} \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico asociado a $J(x_4, y_4)$ viene dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\alpha}{1-2\alpha}\lambda + \frac{\alpha-1}{1-2\alpha}.$$

El discriminante asociado a $p(\lambda)$ viene dado por

$$\Delta = \frac{\alpha^2}{(1-2\alpha)^2} - \frac{4(\alpha-1)}{1-2\alpha} = \frac{(3\alpha-2)^2}{(1-2\alpha)^2}.$$

Por lo tanto, las raíces de $p(\lambda)$ vienen dadas por

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}.$$

De aquí, concluímos que (x_4, y_4) es un punto silla inestable.

Puntaje:
- Calcula los valores propios de $J(x_j, x_j)$ con $j = 1, 2, 3$ $(0,2$ pt. por cada uno).
- Calcula los valores propios de $J(x_4, x_4)$ $(0,6$ pt.).
- Identifica el tipo y estabilidad de (x_j, y_j), con $j = 1, 2, 3, 4$ $(0,2$ pt. por cada uno).
Ob: No penalizar si no hace la distinción en estable o asintóticamente estable.

3. **(2 puntos)** Encuentre los vectores propios asociados a la matriz Jacobiana o Diferencial evaluada en cada punto crítico (o de equilibrio) y esbozar los diagramas de fase para cada linealización considerando $\alpha = 1/4$.
Solución:
- Para el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y base de vectores propios está compuesta por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto, el diagrama de fase asociado a (x_1, y_1) son
- Para el punto (x_2, y_2), tenemos que $\lambda_1 = 3/4$ y $\lambda = -1$. La base de vectores propios está compuesta por

$$v_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  El diagrama de fase viene dado por
- Para $(x_3, y_3) = (1, 0)$, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, y un vector propio asociado es

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  De esta manera, el diagrama de fase viene dado por

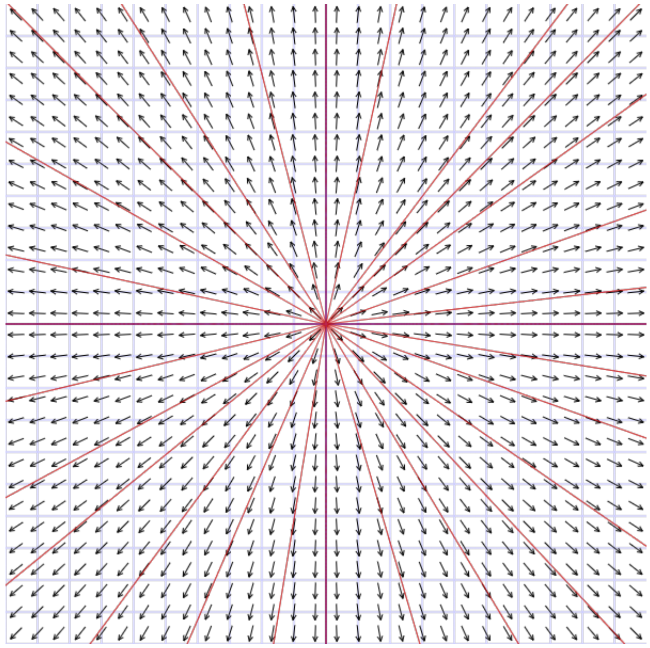

Figura 1: Diagrama de fase para $(x_1, y_1) = (0, 0)$

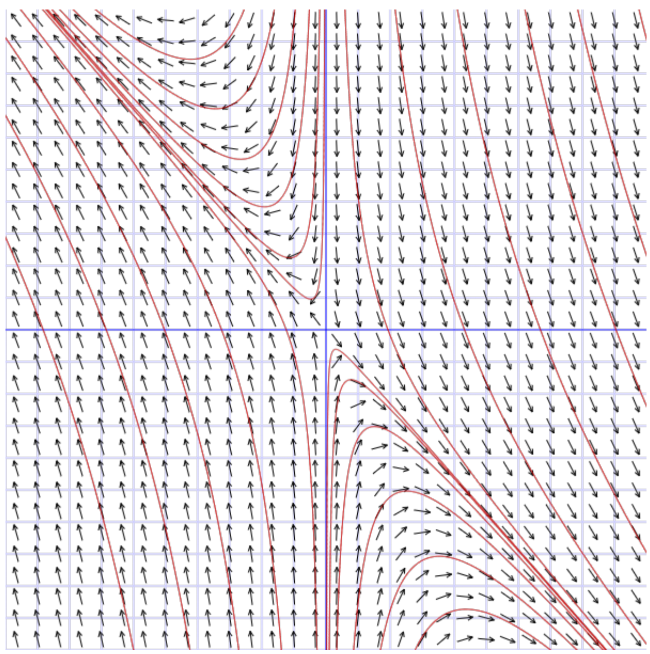

Figura 2: Diagrama de fase para $(x_2, y_2) = (0, 1)$

- Para $(x_4, y_4) = (3, -4)$, tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = 3/2$ y $\lambda_2 = -1$ y la base de vectores propios están dados por

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el retrato de fase viene dado por

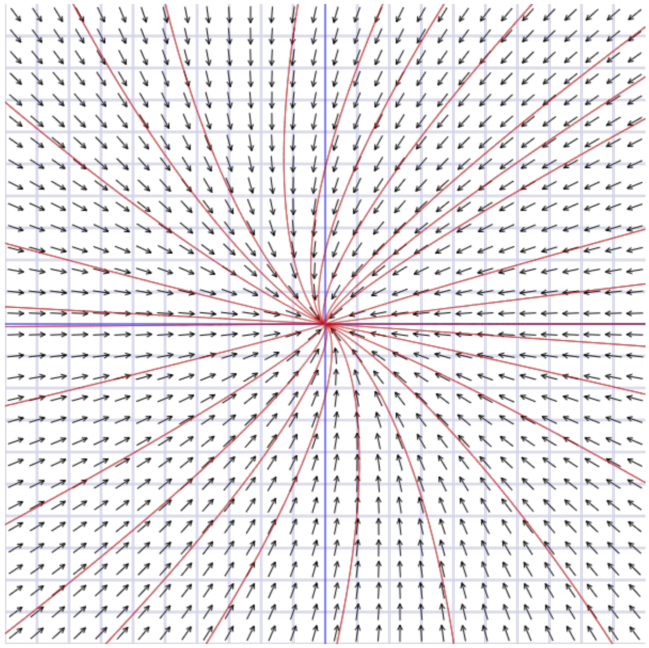

Figura 3: Diagrama de fase para $(x_3, y_3) = (1, 0)$

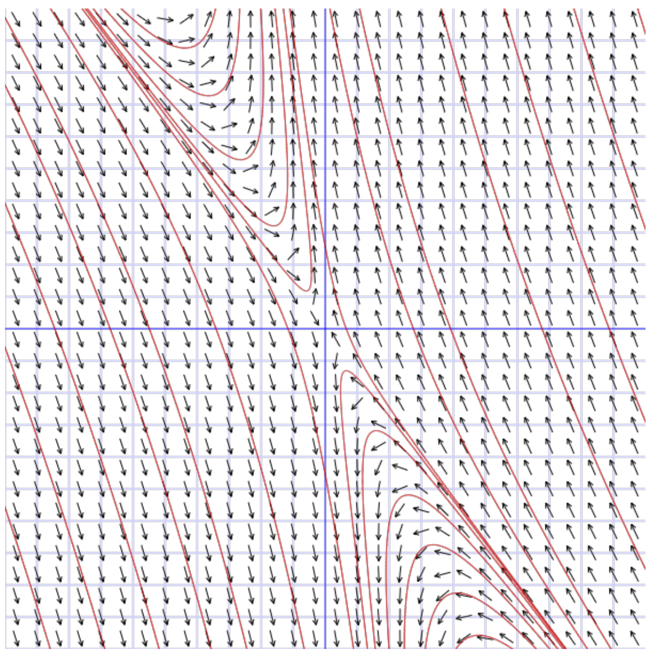

Figura 4: Diagrama de fase para $(x_3, y_3) = (1, 0)$

Puntaje:

- Calcula los vectores propios de los puntos críticos. $(0,2$ pt. por cada uno)
- Dibuja los diagramas de fase $(0,3$ pt. por cada uno).