



Control recuperativo

P1. a) (3.0 pts) Sea $P(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, la función proposicional

$$\forall y \in [0, 1], y \leq x \implies 2y \leq 1.$$

Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \text{ es } V\}$.

Solución:

Distingamos tres casos: $x < 0$, $0 \leq x \leq 1/2$ y $x > 1/2$.

- Caso $x < 0$. Notemos que para todo $y \in [0, 1]$ la proposición $y \leq x$ es F (al ser x negativo e y mayor o igual a cero). Luego $P(x)$ equivale a $\forall y \in [0, 1], F \implies 2y \leq 1$ lo que es V . (0.8 pts)
- Caso $0 \leq x \leq 1/2$. Notar que si $y \in [0, 1]$ es tal que $y \leq x$, entonces $y \leq 1/2$. Luego $P(x)$ es V . (0.8 pts)
- Caso $x > 1/2$. Podemos considerar $y_0 \in [0, 1]$ tal que $1/2 < y_0 < x$. Para este valor y_0 , tenemos que $2y_0 > 1$, con lo cual la proposición $y_0 \leq x \implies 2y_0 \leq 1$ equivale a $V \implies F$, que es F . Así, $P(x)$ es F . (0.8 pts)

Del análisis precedente obtenemos que $\{x \mid P(x) \text{ es } V\} = (-\infty, 0) \cup [0, 1/2] = (-\infty, 1/2]$. (0.6 pts)

Indicaciones corrección.

- Asignar todo el puntaje si llegan al resultado final considerando otros casos y razonan de manera correcta.
- Si consideran el caso $x \in (-\infty, 1/2]$ sin desglosarlo entre $(-\infty, 0)$ y $[0, 1/2]$, asignar todo el puntaje (1.6 pts) si tienen el desarrollo correcto.
- En caso de no separar en casos ni obtener el resultado, asignar (0.2 pts) por cada evaluación de $P(x)$ que hagan con valores específicos. Asignar máximo (0.8 pts) por estos casos. Por ejemplo, si muestran que $P(-1)$ es V , $P(0)$ es V , $P(1)$ es F , asignar (0.6 pts).

b) (3.0 pts) Considere la función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x/(x+1)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$ y sea g_n el resultado de componer f n -veces, es decir, $g_1 = f$, $g_2 = f \circ f$, y en general $g_n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{f \text{ aparece } n \text{ veces}}$ para $n \geq 1$.

Demuestre que

$$g_n(x) = \frac{x}{nx+1} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Solución.

Usamos el principio de inducción para demostrar la igualdad entre $g_n(x)$ y $x/(nx+1)$. (0.5 pts)¹

- Caso base: $n = 1$.

Tenemos que $g_1 = f = \frac{x}{1 \cdot x + 1}$, lo que prueba el caso base. (0.5 pts)

- " $n \implies n+1$ ". Escribamos los elementos de la inducción.

- Hipótesis de inducción (H.I.). Suponemos que la propiedad es cierta para n , es decir que $g_n(x) = \frac{x}{nx+1}$. (0.2 pts)
- Por demostrar que la propiedad también es cierta para $n+1$, es decir que $g_{n+1}(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}$. (0.3 pts)

En efecto,

$$g_{n+1}(x) = f \circ g_n(x) = f(g_n(x)) \quad (0,5 \text{ pts})^2$$

$$\text{H.I. } \rightarrow = f(x/(nx+1)) \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$\text{def. de } f \rightarrow = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1} + 1} \quad (0,3 \text{ pts})$$

$$= \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x+nx+1}{nx+1}}$$

$$= \frac{x}{(n+1)x+1} \quad (0,2 \text{ pts})$$

Gracias al principio de inducción concluimos que $g_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ para todo $n \geq 1$.

Indicaciones corrección.

- ¹ Asignar los (0.5 ptos) si mencionan explícitamente que hay que usar inducción, o si plantean el problema por inducción de manera implícita.
- ² Pueden usar también $g_n(f(x))$. Asignar todo el puntaje si el desarrollo es correcto.

- P2.** a) Sea $f: A \rightarrow B$ una función epiyectiva y sea $g: B \rightarrow A$ una función tal que $g(b) \in f^{-1}(\{b\})$ para todo $b \in B$.
- a.i) (2.0 pto) Muestre que $f \circ g = \text{id}_B$ y concluya que g es inyectiva.
- a.ii) (1.5 pto) Con un ejemplo, muestre que g no es necesariamente epiyectiva.

Solución.

a.i) Mostremos en primer lugar que $f \circ g = \text{id}_B$. Notemos que:

- $\text{Dom}(f \circ g) = \text{Dom}(g) = B = \text{Dom}(\text{id}_B)$.
 - $\text{Cod}(f \circ g) = \text{Cod}(f) = B = \text{Cod}(\text{id}_B)$.
- (0.5 pts.)

Para concluir la igualdad de funciones bastará mostrar que $f \circ g(b) = b$, $\forall b \in B$.

Sea $b \in B$ arbitrario. Por hipótesis se tiene que $g(b) \in f^{-1}(\{b\})$. Notemos que

$$\begin{aligned} g(b) &\in f^{-1}(\{b\}) \\ \iff f(g(b)) &\in \{b\} \\ \iff f(g(b)) &= b \\ \iff f \circ g(b) &= b \end{aligned} \quad (1 \text{ pto.})$$

concluyendo la igualdad deseada.

Por otro lado, notemos que como id_B es una función biyectiva, es en particular inyectiva, lo que implica que $f \circ g$ es inyectiva. Por propiedad vista en clases, la inyectividad de $f \circ g$ implica la inyectividad de g , lo que concluye lo pedido. (0.5 pts.)

a.ii) Hay muchos ejemplos que cumplen lo pedido con g no epiyectiva. A continuación ilustramos dos:

- $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b\}$.
 $f(a_1) = f(a_2) = b$, $g(b) = a_1$.
 Se tiene que $g(b) = a_1 \in f^{-1}(\{b\})$, pero g no es epiyectiva pues $g^{-1}(\{a_2\}) = \emptyset$.
- $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$.
 $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{Z}$; $g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{N}$.
 Notemos que $g(b) = b \in f^{-1}(\{b\})$, pero g no es epiyectiva, pues $g^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \emptyset$.

Indicaciones corrección. En la parte a.ii) hay muchos ejemplos posibles. La distribución será (0.5 pts.) por plantear A, B, f y g , (0.5 pts.) por comprobar que el ejemplo cumple con $g(b) \in f^{-1}(\{b\})$, para todo $b \in B$, y (0.5 pts.) por justificar que g no es epiyectiva.

b) (2.5 pts) Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $h: A \rightarrow B$ una función. Suponga que existe $A' \subseteq A$ tal que

$$A' \cap h^{-1}(B') \neq \emptyset \text{ para todo } B' \subseteq B.$$

Demuestre que $h(A') = B$ y concluya que h es epiyectiva.

Solución.

Probemos que $h(A') = B$ por doble inclusión.

- $h(A') \subseteq B$: Esta inclusión es directa por la definición de conjunto imagen. (0.5 pts.)
- $B \subseteq h(A')$: Sea $b \in B$ arbitrario y probemos que $b \in h(A')$. Consideremos el conjunto $B' = \{b\} \subseteq B$. Gracias a la hipótesis del enunciado, tenemos que

$$A' \cap h^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset. \quad (0,5 \text{ pts.})$$

Luego, sea $a \in A' \cap h^{-1}(\{b\})$. Por un lado, $a \in h^{-1}(\{b\})$ implica que $h(a) = b$. Como además $a \in A'$, se tiene que

$$\exists a \in A', h(a) = b.$$

Es decir, $b \in h(A')$, y se concluye la segunda inclusión. (0.5 pts.)

Recordemos que $A' \subseteq A \Rightarrow h(A') \subseteq h(A)$. Gracias a que hemos demostrado $h(A') = B$, tenemos que $B \subseteq h(A)$. (0.5 pts.)

Finalmente como $h(A) \subseteq B$ por definición, concluimos que

$$h(A) = B,$$

por lo que h es epiyectiva. (0.5 pts.)

Duración: 2 horas.