Control Recuperativo 2

P1. a) (3 pts.) Calcule, sin usar inducción, la siguiente sumatoria

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(5^j+8^{k-j}).$$

Solución: Podemos expresar la sumatoria como $A+B$ donde

$$A=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}5^j \quad \text{y} \quad B=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}8^{k-j}.$$

(0,3 pts. por separar la sumatoria en dos)
Calculamos cada término por separado.

$$\begin{aligned}
A=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}5^j &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}5^j\cdot 1^{k-j} && \text{(Completar binomio de Newton – } \textbf{(0,2) pts.}\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}6^k && \text{(Binomio de Newton – } \textbf{(0,5) pts.}\text{)}\\
&= \frac{6^{n+1}-1}{5}. && \text{(Suma geométrica – } \textbf{(0,5) pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}8^{k-j} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}8^{k-j}\cdot 1^{j} && \text{(Completar binomio de Newton – } \textbf{(0,2) pts.}\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}9^k && \text{(Binomio de Newton – } \textbf{(0,5) pts.}\text{)}\\
&= \frac{9^{n+1}-1}{8}. && \text{(Suma geométrica – } \textbf{(0,5) pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

Así, el resultado buscado es $\dfrac{6^{n+1}-1}{5}+\dfrac{9^{n+1}-1}{8}$ **(0,3 pts.)**.

b) (1,5 pts.) Calcule el cardinal del conjunto A definido como los subconjuntos de $\{1,2,3,4,5\}$ que contienen a 1, es decir, calcule el cardinal de

$$A=\{X\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \ \mid \ 1\in X\}.$$

Solución:
Primera forma: Definamos $\mathcal{F}_1=\{X\in\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}) \ \mid \ 1\notin X\}$.
Notemos que $|A|=|\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\setminus\mathcal{F}_1|$ **(0,2 pts.)** Como $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$, obtenemos que

$$|A|=|\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})|-|\mathcal{F}_1|.$$

(0,3 pts. por escribir $|A|$ como resta de cardinales)
Sabemos que $|\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})| = 2^{|\{1,2,3,4,5\}|} = 2^5$ **(0,3 pts.)** Por otro lado, notemos que se tiene $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\{2,3,4,5\})$ **(0,2 pts.)** y por lo tanto $|\mathcal{F}_1| = |\mathcal{P}(\{2,3,4,5\})| = 2^{|\{2,3,4,5\}|} = 2^4$ **(0,3 pts.)**. Así,

$$|A| = 2^5 - 2^4 = 2^4(2-1) = 16.$$

(0,2 pts. por encontrar el valor buscado)

Segunda forma: Todo $X \in A$ se puede escribir de una única forma como $X = \{1\} \cup Y$ donde $Y \in \mathcal{P}(\{2,3,4,5\})$ **(0,5 pts. por describir un conjunto en A)**. Es decir, la función $f\colon A \to \mathcal{P}(\{2,3,4,5\})$, tal que $f(X) = X \setminus \{1\}$ es biyectiva. Verifiquemos esto último. Primero, notar que $X = f(X) \cup \{1\}$ para todo $X \in A$.

- f es inyectiva. Sean $X, Y \in A$ tales que $f(X) = f(Y)$. Luego $X = f(X) \cup \{1\} = f(Y) \cup \{1\} = Y$, de donde concluimos que f es inyectiva.
- f es epiyectiva. Dado $Y \in \mathcal{P}(\{2,3,4,5\})$, el conjunto $X = Y \cup \{1\}$ satisface que $f(X) = Y$. Es decir, f es epiyectiva.

(0,5 pts. por justificar biyección entre A y $\mathcal{P}(\{2,3,4,5\})$).
Como f es biyectiva, tenemos que $|A| = |\mathcal{P}(\{2,3,4,5\})|$ **(0,3 pts. por relacionar estos cardinales)** y por lo tanto $|A| = 2^4 = 16$. **(0,2 pts. por encontrar el valor buscado)**

c) (1,5 pts.) Sea $(G, *)$ un grupo y sea $y \in G$ fijo. Demuestre que la función $f\colon G \to G$ dada por $f(x) = y*x*y^{-1}$ es un homomorfismo de $(G,*)$ en $(G,*)$.

Solución: Para ver que f es homomorfismo de grupos debemos mostrar que para todo $g, h \in G$, $f(g*h) = f(g)*f(h)$. Sean $g, h \in G$.
Primera forma (partiendo de $f(g*h)$): Tenemos

$$f(g*h) = y*(g*h)*y^{-1} = y*g*h*y^{-1}.$$

(0,3 pts. aplicar correctamente la definición).
Sea $e \in G$ el neutro de $(G,*)$. Por definición de neutro, podemos escribir la expresión anterior como

$$f(g*h) = y*g*e*h*y^{-1},$$

(0,2 pts. hacer aparecer el neutro) y por definición de inverso podemos reemplazar e por $y^{-1}*y$, **(0,3 pts. por identificar que $e = y^{-1}*y$)** con lo cual obtenemos

$$f(g*h) = \underbrace{y*g*y^{-1}}_{f(g)} * \underbrace{y*h*y^{-1}}_{f(h)} = f(g)*f(h).$$

(0,5 pts. por reconstruir $f(g)*f(h)$). Concluimos entonces que, para todo $g, h \in G$, $f(g*h) = f(g)*f(h)$, con lo cual f es un homomorfismo de grupos. **(0,2 pts. por escribir conclusión).**

Segunda forma (partiendo de $f(g)*f(h)$): Tenemos

$$f(g)*f(h) = (y*g*y^{-1})*(y*h*y^{-1})$$

por definición de f **(0,3 pts. por plantear expresión).**. Usando que la operación es asociativa en un grupo **(0,2 pts. por mencionar esta propiedad).**, podemos reescribir esto como

$$\begin{aligned} f(g) * f(h) &= y * g * (y^{-1} * y) * h * y^{-1} \\ &= y * g * e * h * y^{-1} && (y^{-1} * y = e) \\ &= y * g * h * y^{-1} && (e \text{ es neutro}) \\ &= f(g * h). && (\text{Definición de } f) \end{aligned}$$

(0,8 pts. por desarrollo).
Concluimos entonces que, para todo $g, h \in G$, $f(g*h) = f(g)*f(h)$, con lo cual f es un homomorfismo de grupos. **(0,2 pts. por escribir conclusión).**

P2. a) Sea $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Se define la operación $\triangle$ en $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ mediante

$$(a,b) \triangle (c,d) = (ac, ad+b).$$

Se sabe (no lo demuestre) que $\triangle$ es asociativa.

i) (1 pto.) Demuestre que la operación $\triangle$ tiene neutro y encuéntrelo.

Solución: Sea $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ el candidato a neutro. Por definición de neutro, (e_1, e_2) debe satisfacer que, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$(a,b) \triangle (e_1,e_2) = (e_1,e_2) \triangle (a,b) = (a,b).$$

(0,3 pts. por plantear condiciones).
La primera igualdad impone, por definición de $\triangle$, que $ae_1 = a$ y $ae_2 + b = b$, de donde deducimos —puesto que $a > 0$— que $e_1 = 1$ y $e_2 = 0$. Por lo tanto nuestro candidato a neutro es $(1,0)$. **(0,4 pts. por encontrar candidato).**
Luego verificamos que para cualquier $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(a,b) \triangle (1,0) = (1,0) \triangle (a,b) = (a,b)$:

- $(a,b) \triangle (1,0) = (a \cdot 1, a \cdot 0 + b) = (a,b)$,
- $(1,0) \triangle (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b + 0) = (a,b)$.

Así, $(1,0)$ es el neutro para $\triangle$. **(0,3 pts. por verificar condiciones para ser neutro y concluir).**

ii) (1 pto.) Dado $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, encuentre, de existir, su inverso para $\triangle$.

Solución: Sea $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$, llamemos (c,d) a su candidato a inverso para $\triangle$. Para que (c,d) sea efectivamente el inverso de (a,b), se debe satisfacer en particular que

$$(a,b) \triangle (c,d) = (1,0).$$

(0,3 pts. por plantear condición).
Por definición de $\triangle$, esto implica que $ac = 1$ y $ad + b = 0$. Como $a > 0$, deducimos que $c = 1/a > 0$ y $d = -b/a$. **(0,4 pts. por encontrar candidato).**
Luego verificamos que para cualquier $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(a,b) \triangle (1/a, -b/a) = (1/a, -b/a) \triangle (a,b) = (1,0)$:

- $(a,b) \triangle (1/a, -b/a) = (a/a, -ab/a + b) = (1,0)$,
- $(1/a, -b/a) \triangle (a,b) = (a/a, b/a - b/a) = (1,0)$.

Así, cada elemento de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tiene inverso para $\triangle$ y este corresponde a $(1/a, -b/a)$. **(0,3 pts. por verificar condiciones del inverso y concluir).**

iii) (1 pto.) Determine si la operación $\triangle$ es conmutativa.

Solución: Notemos que los pares ordenados $(1,1)$ y $(2,1)$ pertenecen a $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ y se tiene que

- $(1,1) \triangle (2,1) = (1 \cdot 2, 1 \cdot 1 + 1) = (2,2)$,
- $(2,1) \triangle (1,1) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 1) = (2,3)$.

Luego, $\triangle$ no es conmutativa.
(1 pto. por encontrar un ejemplo correcto que muestre que $\triangle$ no es conmutativa)

b) Considere los complejos $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ y $z_2 = 1 + i$.

i) (1 pto.) Escriba el complejo $w = z_1/z_2$ en forma cartesiana.

Solución:
Primera forma (multiplicando y dividiendo por el conjugado):
Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} && \text{(Reemplazando)}\\
&= \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} && \text{(Multiplicando y dividiendo por } 1-i \text{ – } \textbf{(0,3) pts.}\text{)}\\
&= \frac{1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}}{1^2-i^2} && \text{(Expandiendo – } \textbf{(0,3) pts.}\text{)}\\
&= \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+1} && (i^2=-1 \text{ – } \textbf{(0,3) pts.}\text{)}\\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i. && \text{(Reordenando – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

Segunda forma (usando la fórmula del inverso):
La fórmula del inverso dice que

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

si $a + bi \neq 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Aplicando esta fórmula a z_2, tenemos $a = 1$ y $b = 1$, por lo que

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{1^2+1^2} - \frac{1}{1^2+1^2}i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(0,3 pts. por aplicar correctamente la fórmula del inverso a $1 + i$)
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= (1+i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) && \text{(Reemplazando)}\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 && \text{(Expandiendo – } \textbf{(0,3) pts.}\text{)}\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} && (i^2=-1 \text{ – } \textbf{(0,3) pts.}\text{)}\\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i. && \text{(Reordenando – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

ii) (1 pto.) Escriba el complejo $w = z_1/z_2$ en forma polar.

Solución: Comenzamos escribiendo z_1 en forma polar. Tenemos que

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

(0,1 pts. por encontrar el módulo de z_1)
Además, si se dibuja z_1 en el plano, se ve que el ángulo $\arg(1+\sqrt{3}i) \in [0, 2\pi)$ que forma con la horizontal cumple $\tan(\arg(1+\sqrt{3}i)) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, por lo que $\arg(1+\sqrt{3}i) = \pi/3$ **(0,1 pts.)**
Obtenemos de esta forma que $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$ **(0,1 pts.)**
Escribimos ahora z_2 en forma polar. Tenemos que

$$|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

(0,1 pts. por encontrar el módulo de z_2)
Además, si se dibuja z_2 en el plano, se ve que el ángulo $\arg(1+i) \in [0, 2\pi)$ que forma con la horizontal cumple $\tan(\arg(1+i)) = \frac{1}{1} = 1$, por lo que $\arg(1+i) = \pi/4$ **(0,1 pts.)** Obtenemos de esta forma que $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ **(0,1 pts.)**
Finalmente, concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} && \text{(Reemplazando)} \\
&= \sqrt{2}e^{i(\pi/3-\pi/4)} && \text{(Propiedades de potencias – \textbf{(0,2) pts.})} \\
&= \sqrt{2}e^{i\pi/12}. && (\pi/3-\pi/4=\pi/12 \text{ – \textbf{(0,2) pts.}})
\end{aligned}$$

iii) (1 pto.) Concluya que $\cos(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ y que $\operatorname{sen}(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Solución: Juntando las partes i) y ii), tenemos que

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i.$$

(0,2 pts. por juntar las partes i) y ii))
Por lo tanto,

$$e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i.$$

(0,2 pts. por despejar $e^{i\pi/12}$).
Finalmente, como además $e^{i\pi/12} = \cos(\pi/12) + i\operatorname{sen}(\pi/12)$ **(0,3 pts.)**, concluimos igualando partes reales e imaginarias que

$$\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

y

$$\operatorname{sen}(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(0,3 pts. por concluir el resultado)

Duración: 1h 30'.