



Control Recuperativo 2

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos; si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique las hipótesis.

P1.

a) Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$f(x) = (x + 1)^2.$$

1) (1.5 pts.) Determine el conjunto imagen $f((-1, 0) \cup [1, 2])$.

Solución

Notemos que

$$-1 < x < 0 \implies 0 < x + 1 < 1 \implies 0 < (x + 1)^2 < 1,$$

por tanto, $f((-1, 0)) \subseteq (0, 1)$. Además, para cada $y \in (0, 1)$, elegimos $x = \sqrt{y} - 1$, y entonces tenemos que $f(x) = y$, y además, $x \in (-1, 0)$. Por tanto,

$$f((-1, 0)) = (0, 1). \quad \dots 0.5 \text{ pts.}$$

Por otro lado, tenemos que

$$1 \leq x \leq 2 \implies 2 \leq x + 1 \leq 3 \implies 4 \leq (x + 1)^2 \leq 9,$$

y entonces $f([1, 2]) \subseteq [4, 9]$. Como hicimos en el párrafo anterior, dado $y \in [4, 9]$, elegimos $x = \sqrt{y} - 1$, y tenemos que $f(x) = y$, y además $x \in [1, 2]$. Por tanto

$$f([1, 2]) = [4, 9]. \quad \dots 0.5 \text{ pts.}$$

Por definición de conjunto imagen tenemos que

$$f((-1, 0) \cup [1, 2]) = f((-1, 0)) \cup f([1, 2]) = (0, 1) \cup [4, 9]. \quad \dots 0.5 \text{ pts.}$$

2) (1.5 pts.) Determine la preimagen $f^{-1}([-1, 0])$.

Solución

Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos $f(x) = (x+1)^2$, por lo que $f(x) \geq 0$. Este hecho implica que para cada $y \in [-1, 0)$, tenemos que $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ 0.5 pts.

Por otro lado, si $y = f(x) = 0$, tenemos $f(x) = (x+1)^2 = 0$, lo que implica que $x+1 = 0$, y por tanto $x = -1$. Luego, la preimagen $f^{-1}(\{0\}) = \{-1\}$ 0.5 pts.

Además, por definición de preimagen tenemos que

$$f^{-1}([-1, 0]) = \bigcup_{y \in [-1, 0]} f^{-1}(\{y\}) = \{-1\}. \quad \dots 0.5 \text{ pts.}$$

b) Calcule las siguientes sumas:

1) (1 pt.) $\sum_{k=0}^n \frac{(k+1)!(1-k)}{k^2+k}.$

Sugerencia: Utilice la identidad $r \cdot r! = (r+1)! - r!$

Solución

Tenemos

$$\sum_{k=1}^n \frac{(k+1)!(1-k)}{k^2+k} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)k(k-1)!(1-k)}{k(k+1)} \quad \dots 0.2 \text{ pts.}$$

$$= \sum_{k=1}^n (k-1)!(1-k) \quad \dots 0.2 \text{ pts.}$$

$$= \sum_{k=1}^n -(k-1)!(k-1) \quad \dots 0.2 \text{ pts.}$$

$$= - \sum_{k=1}^n (k! - (k-1)!) \quad \dots 0.2 \text{ pts.}$$

$$= -(n! - 0!)$$

$$= 1 - n! \quad \dots 0.2 \text{ pts.}$$

2) (2 pts.) $\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{m+1} (5+2k)(2^{j-1}3^{j+1}).$

Solución

Dado que el término $5 + 2k$ es independiente de la segunda suma con índice j , tenemos lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{m+1} (5 + 2k)(2^{j-1}3^{j+1}) = \sum_{k=0}^n (5 + 2k) \sum_{j=1}^{m+1} (2^{j-1}3^{j+1}). \quad \dots 0.3 \text{ pts.}$$

La primer suma es una suma aritmética, para la cual tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (5 + 2k) &= \sum_{k=0}^n 5 + \sum_{k=0}^n 2k \\ &= 5 \sum_{k=0}^n 1 + 2 \sum_{k=0}^n k \\ &= 5(n+1) + 2 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)(n+5). \quad \dots 0.5 \text{ pts.} \end{aligned}$$

Para la segunda suma, la cual es una suma geométrica, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} (2^{j-1} \cdot 3^{j+1}) &= 3^2 \sum_{j=1}^{m+1} 2^{j-1} \cdot 3^{j-1} && \dots 0.2 \text{ pts.} \\ &= 9 \sum_{j=0}^m 2^j \cdot 3^j && \dots 0.2 \text{ pts.} \\ &= 9 \sum_{j=0}^m (2 \cdot 3)^j && \dots 0.2 \text{ pts.} \\ &= 9 \sum_{j=0}^m 6^j \\ &= 9 \left(\frac{6^{m+1} - 1}{6 - 1} \right) = \frac{9}{5} (6^{m+1} - 1). && \dots 0.2 \text{ pts.} \end{aligned}$$

Combinando los dos resultados obtenemos:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{m+1} (5 + 2k)(2^{j-1}3^{j+1}) = \frac{9}{5} (6^{m+1} - 1)(n+1)(n+5). \dots 0.4 \text{ pts.}$$

P2.

a) Definimos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ de la siguiente manera:

$$x\mathcal{R}y \iff \frac{x+1}{y+1} \in \mathbb{N}.$$

1) (1.5 pts.) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

Solución

Vamos a mostrar que $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

- **Refleja:** Para cada $x \in \mathcal{R} \setminus \{1\}$ tenemos que $\frac{x+1}{x+1} = 1 \in \mathbb{N}$, por tanto $\mathcal{R}$ es refleja. **... 0.5 pts.**

- **Antisimétrica:** Supongamos que $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$, entonces existen $h, k \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{x+1}{y+1} = k$ y $\frac{y+1}{x+1} = h$, y equivalentemente, $x+1 = (y+1)k$ y $y+1 = (x+1)h$. Luego tenemos

$$x+1 = (y+1)k = (x+1)hk \implies hk = 1 \implies h = 1 \wedge k = 1 \implies x = y.$$

Por tanto, $\mathcal{R}$ es antisimétrica. **... 0.5 pts.**

- **Transitiva:** Si $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$, entonces existen $h, k \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{x+1}{y+1} = k$ y $\frac{y+1}{z+1} = h$. Luego

$$\frac{x+1}{z+1} = \frac{(y+1)k}{z+1} = k \frac{y+1}{z+1} = kh \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $x\mathcal{R}z$, y entonces $\mathcal{R}$ es transitiva. **... 0.5 pts.**

2) (0.5 pts.) Determinar si $\mathcal{R}$ es orden total.

Solución

No es orden total, pues para $x = 2$ y $y = 3$ tenemos $\frac{x+1}{y+1} \notin \mathbb{N}$ y $\frac{y+1}{x+1} \notin \mathbb{N}$, por lo que $(x, y), (y, x) \notin \mathcal{R}$, y por tanto no son comparables. **... 0.5 pts.**

b) En $\mathbb{Z}^2$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(x, y)\mathcal{R}(u, v) \iff (x \equiv_3 u) \wedge (y \equiv_5 v).$$

1) (2 pts.) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Solución

Vamos a mostrar que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.

- **Refleja:** Dado $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tenemos que $x \equiv_3 x$ y $y \equiv_5 y$, y por tanto $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ **0.4 pt.**
- **Simétrica:** Supongamos que $(x, y), (u, v) \in \mathbb{Z}^2$ satisfacen $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$, lo que implica que $x \equiv_3 u$ y $y \equiv_5 v$, es decir, $x - u = 3k$ y $y - v = 5h$, para algunos $k, h \in \mathbb{Z}$. Luego

$$u - x = 3(-k) \wedge v - y = 3(-h) \implies (u, v)\mathcal{R}(x, y).$$

Por tanto, $\mathcal{R}$ es simétrica. ... **0.6 pt.**

- **Transitiva:** Considere $(x, y), (u, v), (w, z) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$ y $(u, v)\mathcal{R}(w, z)$. Luego, existen enteros k_1, k_2, h_1, h_2 tales que

$$x - u = 3k_1, \quad y - v = 5k_2, \quad u - w = 3h_1, \quad v - z = 5h_2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x - w &= x - u + u - w = (x - u) + (u - w) = 3k_1 + 3h_1 = 3(k_1 + h_1), \\ y - z &= y - v + v - z = (y - v) + (v - z) = 5k_2 + 5h_2 = 5(k_2 + h_2). \end{aligned}$$

Se deduce que $(x, y)\mathcal{R}(w, z)$, y por tanto $\mathcal{R}$ es transitiva. ... **1 pt.**

- 2) (2 pts.) Determine las clases de equivalencia $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1, 3)]_{\mathcal{R}}$, y exhiba al menos 3 elementos en cada clase.

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned} [(0, 0)]_{\mathcal{R}} &= \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k, h \in \mathbb{Z} \text{ tales que } u = 3k \text{ y } v = 5k\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid u \text{ es múltiplo de } 3 \text{ y } v \text{ es múltiplo de } 5\} \dots \text{0.5 pts.} \end{aligned}$$

Además, $(0, 0), (3, 5), (6, 10) \in [(0, 0)]_{\mathcal{R}}$ **0.5 pts.**

Por otro lado,

$$\begin{aligned} [(1, 3)]_{\mathcal{R}} &= \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k, h \in \mathbb{Z} \text{ tales que } u - 1 = 3k \text{ y } v - 3 = 5k\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid u - 1 \text{ es múltiplo de } 3 \text{ y } v - 3 \text{ es múltiplo de } 5\} \dots \text{0.5 pts.} \end{aligned}$$

Luego, $(-2, -2), (-2, 3), (1, 3) \in [(1, 3)]_{\mathcal{R}}$ **0.5 pts.**

P3.

- a) Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definimos el conjunto

$$A_n = \left\{ \frac{2i+1}{2^n} \mid 0 \leq i < 2^{n-1} \right\}.$$

- 1) (2 pts.) Demostrar que $|A_3| = 4$, $|A_4| = 8$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar $|A_n|$.

Solución

Tenemos que

$$A_3 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4} \right\} \quad \text{y} \quad A_4 = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}, \frac{15}{8} \right\}.$$

Por tanto $|A_3| = 4$ y $|A_4| = 8$ **0.6 pts.**

Ahora vamos a mostrar que $|A_n| = 2^{n-1}$. Definimos la función $f : A_n \rightarrow \{1, \dots, 2^{n-1}\}$ de la siguiente manera:

$$f\left(\frac{2i+1}{2^n}\right) = i+1.$$

Dado que $0 \leq i < 2^{n-1}$, tenemos que $1 \leq f\left(\frac{2i+1}{2^n}\right) = i+1 \leq 2^{n-1}$, por tanto $f(i) \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$.

- **Inyectividad:** Si $x = \frac{2i+1}{2^n}, y = \frac{2j+1}{2^n} \in A_n$ con $x \neq y$, tenemos $i \neq j$, y entonces

$$f(x) = i+1 \neq j+1 = f(y).$$

Concluimos que f es inyectiva. ... **0.5 pts.**

- **Epiyectividad:** Para cada $j \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$, tenemos $j-1 \in \{0, \dots, 2^{n-1}-1\}$, y por tanto $\frac{2(j-1)+1}{2^n} \in A_n$. Por tanto, f es epiyectiva. ... **0.5 pts.**

Dado que f es biyectiva, y por definición de cardinal, tenemos que

$$|A_n| = |\{1, \dots, 2^{n-1}\}| = 2^{n-1} \dots \textbf{0.4 pts.}$$

- 2) (1 pt.) Determinar si A_n y A_m son disjuntos, para $n \neq m$.

Solución

Veámos que $A_n \cap A_m = \emptyset$, para $n \neq m$. Supongamos que no, entonces existe $x \in A_n \cap A_m$, y entonces

$$\frac{2i+1}{2^n} = x = \frac{2j+1}{2^m},$$

para algunos i, j, n, m con $0 \leq i < 2^{n-1}$ y $0 \leq j < 2^{m-1}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n < m$. Luego,

$$\frac{2i+1}{2^n} = x = \frac{2j+1}{2^m} \implies (2i+1)2^m = (2j+1)2^n \implies (2i+1)2^{m-n} = 2j+1, \dots \textbf{0.5 pts.}$$

y como $(2i+1)2^{m-n}$ es par (porque $m-n \geq 1$), mientras que $2j+1$ es impar, tenemos una contradicción. Se deduce que A_n y A_m son disjuntos. ... **0.5 pts.**

- 3) (1 pt.) Para $m = 125$, sea $\mathcal{A}_m = \bigcup_{k=1}^m A_k$. Demuestre que $|\mathcal{A}_m| = 2^{125} - 1$.

Solución

Dado que $\mathcal{A}_m = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{125}$, y como $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, tenemos que el cardinal de la unión disjunta es la suma de cardinales, es decir,

$$|\mathcal{A}_m| = \left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_{i=1}^m |A_i|. \quad \dots 0.5 \text{ pts.}$$

Utilizando sumatoria geométrica, tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_m| &= \sum_{i=1}^m |A_i| \\ &= \sum_{i=1}^m 2^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} 2^i \\ &= \frac{2^m - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{125} - 1. \end{aligned}$$

$\dots 0.5$ pts. por el desarrollo correcto de la sumatoria

b) (2 pts.) Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{i} \binom{n}{j} = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Solución

Notemos que

$$\sum_{j=1}^n \binom{n-1}{i} \binom{n}{j} = \binom{n-1}{i} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j}$$

porque $\binom{n-1}{i}$ es constante para cada valor de j . **... 0.4 pts.**

Además, utilizando el Teorema del binomio tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^j \cdot 1^{n-j} - \binom{n}{0} 1^j \cdot 1^{n-j} = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1 \dots \mathbf{0.4 \text{ pts.}}$$

Utilizamos nuevamente el Teorema del binomio y tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{i} \binom{n}{j} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (2^n - 1) && \dots \mathbf{0.3 \text{ pts.}} \\ &= (2^n - 1) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} && \dots \mathbf{0.3 \text{ pts.}} \\ &= (2^n - 1) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 1^i \cdot 1^{j-i} && \dots \mathbf{0.3 \text{ pts.}} \\ &= (2^n - 1) (1+1)^{n-1} \\ &= (2^n - 1) (2^{n-1}) && \dots \mathbf{0.3 \text{ pts.}} \end{aligned}$$