



PAUTA CONTROL RECUPERATIVO C2

P1. a) (2pts) Sean $A \neq \emptyset$, un conjunto con al menos dos elementos. Considere la función

$$\begin{aligned} f: A \times A &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \\ (a, b) &\longrightarrow (\{a, b\}, \{b\}) \end{aligned}$$

¿Es inyectiva? ¿Sobreyectiva? ¿Biyectiva? Justifique adecuadamente su respuesta.

Solución: .

- Sí es inyectiva. Notemos que

$$\begin{aligned} &f((a, b)) = f((a, c)) \\ \Leftrightarrow &(\{a, b\}, \{b\}) = (\{c, d\}, \{d\}) && \text{igualando coordenada a coordenada} \\ \Leftrightarrow &\{a, b\} = \{c, d\} \wedge \{b\} = \{d\} && \text{igualdad de conjuntos de un solo elemento} \\ \Leftrightarrow &\{a, b\} = \{c, d\} \wedge b = d && \text{ya conocemos la igualdad de b con d} \\ \Leftrightarrow &\{a, b\} = \{c, b\} \wedge b = d && \text{igualdad de conjuntos de dos elementos con uno en común} \\ \Leftrightarrow &a = c \wedge b = d && \text{igualando coordenada a coordenada} \\ \Leftrightarrow &(a, b) = (c, d) \end{aligned}$$

$$\therefore f((a, b)) = f((a, c)) \Rightarrow (a, b) = (c, d)$$

- No es sobreyectiva. Pues notemos que el enunciado dice que A tiene al menos dos elementos, podemos llamarlos a, b . Además, la segunda coordenada de la imagen siempre tiene un único elemento, por ende, el elemento $(\{a, b\}, \{a, b\})$ (que pertenece a $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$) no tiene pre-imagen.
- Para ser biyectiva es necesario que sea inyectiva y sobreyectiva, ya vimos que no se cumple lo segundo por ende no es biyectiva.

Puntajes

- De la inyectividad (0.8pts que se descomponen de la siguiente forma):
 - Por explicitar que sí es inyectiva, con algún argumento aunque no esté completamente correcto, 0.2pt
 - Por traducir la igualdad de coordenadas, a igualdades de conjuntos 0.1pts
 - Por deducir que $b=d$ 0.2pts
 - Por usar lo anterior para concluir que $a=c$ 0.2pts
 - Por concluir que $(a,b)=(c,d)$ 0.1pt
 - No es necesario escribir en palabras las razones de las equivalencias como en la pauta.
- De la sobreyectividad (0.8pts que se descomponen de la siguiente forma):
 - Explicitar que no es sobreyectiva, con algún argumento (aunque no esté completamente correcto) 0.2pts
 - Con respecto al argumento, este puede ser de múltiples formas, hasta con puras palabras, lo importante es que en alguna parte esté un contraejemplo, o que se explicita que $P(A)$ tiene conjuntos con al menos dos elementos, y la segunda coordenada solo son singletons.
 - Si el argumento es correcto dar 0.6pts
 - Si el argumento tiene algún elemento de la solución del problema pero no está completo 0.3pts
 - Si el argumento no tiene ningún elemento de la solución del problema 0pts
- De la biyectividad (0.4pts).
 - Entregarlos si entrega una respuesta justificada y coherente con respecto a sus respuestas de las partes anteriores. En particular, si responde que si en las partes anteriores responde que es sobreyectiva e inyectiva y en esta concluye que por ende es biyectiva dar el puntaje.

b) (2pts) Sean $f : A \rightarrow A$, $g : A \rightarrow A$ dos funciones. Demuestre que

$$[f \circ g \text{ inyectiva} \wedge g \text{ sobreyectiva}] \implies f \text{ inyectiva} .$$

Solución: .

- Forma 1: Por propiedad del apunte tenemos que

$$f \circ g \text{ inyectiva} \Rightarrow g \text{ inyectiva},$$

como además sabemos que g sobreyectiva, concluimos que g biyectiva. Luego, existe su inversa y la podemos usar para componer. Notemos que como g^{-1} es biyectiva, en particular también es inyectiva. De esta forma:

$$\underbrace{f \circ g}_{\text{inyectiva}} \circ \underbrace{g^{-1}}_{\text{inyectiva}} = f \circ Id_A = f$$

es la composición de una función inyectiva con otra inyectiva, que por propiedad sabemos que resulta inyectiva.

- Forma 2: Como g es sobreyectiva, para cualquier $x \in A$, existe $x' \in A$ tal que $x = g(x')$ con $x' \in A$. De esta forma, sean $x_1, x_2 \in A$ tenemos que:

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Leftrightarrow & f(g(x'_1)) = f(g(x'_2)) \\ \Leftrightarrow & (f \circ g)(x'_1) = (f \circ g)(x'_2) \quad \text{usando } f \circ g \text{ inyectiva} \\ \Leftrightarrow & x'_1 = x'_2 \end{aligned}$$

$$\therefore f \text{ inyectiva.}$$

Puntajes

- Forma 1 (2 pts que se descomponen de la siguiente forma):
 - Por deducir g inyectiva 0.4pts
 - Por deducir g biyectiva 0.4pts
 - Por componer con la inversa 0.4pts
 - Por argumentar que es composición de funciones inyectivas 0.4pts
 - Por concluir que f inyectiva 0.4pts
- Forma 2 (2 pts que se descomponen de la siguiente forma):
 - Por argumentar que g sobreyectiva permite hacer las transformaciones $x=g(x')$ 0.4pts
 - Por hacer las transformaciones $x=g(x')$ 0.4pts
 - Escribir $f(g(x'_1)) = f(g(x'_2))$ como $(f \circ g)(x'_1) = (f \circ g)(x'_2)$ 0.4pts. Este paso puede reemplazarse por argumentar en palabras que $f(g(x))$ es la composición de f con g .
 - Por argumentar que la hipótesis de inyectividad es lo que permite concluir que $x_1 = x_2$ 0.4pts
 - Concluir que $x_1 = x_2$ 0.2pts
 - Concluir que f inyectiva 0.2pts

c) (2pts) Sea $\mathcal{A} \neq \emptyset$ una familia de conjuntos que cumple las siguientes propiedades:

I) $\emptyset \in \mathcal{A}$

II) $[B \in \mathcal{A} \wedge C \in \mathcal{A}] \implies B \cup C \in \mathcal{A}$.

Además, dado un $H \in \mathcal{A}$, se define la familia de conjuntos

$$\mathcal{A}_H = \{X \cap H \mid X \in \mathcal{A}\},$$

en palabras, un conjunto Y pertenece a $\mathcal{A}_H$ sí y solo sí se puede escribir como la intersección de algún elemento de $\mathcal{A}$ con H .

Demuestre que $\mathcal{A}_H$ cumple las mismas 2 propiedades enunciadas. Es decir, que:

I) $\emptyset \in \mathcal{A}_H$

II) $[B \in \mathcal{A}_H \wedge C \in \mathcal{A}_H] \implies B \cup C \in \mathcal{A}_H$.

Solución: .

- Veamos que se cumplen las dos propiedades:

- i) Por hipótesis sabemos que $\emptyset \in \mathcal{A}$, además es claro que $\emptyset = \emptyset \cap H$. De esta forma, usando la definición de $\mathcal{A}_H$ se tiene que $\emptyset = \emptyset \cap H \in \mathcal{A}_H$, pues es un elemento de $\mathcal{A}$ interseccionado con H .
- ii) Sean $B, C \in \mathcal{A}_H$. Por definición de $\mathcal{A}_H$, deben existir conjuntos $X, Y \in \mathcal{A}$ tales que $B = X \cap H, C = Y \cap H$. De esta forma,

$$B \cup C = (X \cap H) \cup (Y \cap H) = (X \cup Y) \cap H.$$

Además, como $\mathcal{A}$ cumple la propiedad en cuestión, se tiene que

$$X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{A}.$$

De esta forma se concluye que $B \cup C$ se puede escribir como un elemento de $\mathcal{A}$ interseccionado con H . Es decir, $B \cup C \in \mathcal{A}_H$, que era lo pedido.

Puntajes

- i) Con respecto a la primera propiedad son 0.6pts con los siguientes detalles:
 - Por demostrar con todas las justificaciones que $\emptyset \in \mathcal{A}_H$ 0.6pts.
 - Si hace bien la demostración pero no verifica que $\emptyset \in \mathcal{A}$ 0.4pts
 - Si solo reconoce que $\emptyset = \emptyset \cap H$ 0.2pts
- ii) Con respecto a la segunda propiedad descomponer 1.4pts de la siguiente forma:
 - Por reconocer qué significa que B, C estén en $\mathcal{A}_H$ 0.4pts.
 - Por usar la distributividad 0.2pts No es necesario que escriban distributividad.
 - Por reconocer que $X \cup Y$ también está en $\mathcal{A}_H$ por la propiedad 0.4pts
 - Por concluir 0.4pts
 - No es necesario que escriban en palabras “es un elemento de $\mathcal{A}$ interseccionado con H ”, basta con que esté escrito que el conjunto está en $\mathcal{A}$ y que está interseccionado con H .