



PAUTA CONTROL RECUPERATIVO

P1. Se define $\mathcal{R}$ relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por

$$\forall (n, m), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (n, m)\mathcal{R}(p, q) \iff m - n = q - p.$$

a) (3 pts.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Solución

Es necesario probar que $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva $\leftarrow [0,5 \text{ pts}]$.

- $\mathcal{R}$ es reflexiva: Sea $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se tiene $(n, m)\mathcal{R}(n, m) \iff m - n = m - n$, lo cual es verdadero. $\leftarrow [0,5 \text{ pts}]$.
- $\mathcal{R}$ es simétrica: Sean $(n, m), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tales que $(n, m)\mathcal{R}(p, q) \iff m - n = q - p \iff q - p = m - n \iff (p, q)\mathcal{R}(n, m)$ $\leftarrow [1 \text{ pts}]$.
- $\mathcal{R}$ es transitiva: Sean $(n, m), (p, q), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales $(n, m)\mathcal{R}(p, q) \wedge (p, q)\mathcal{R}(e, f) \iff (m - n = q - p) \wedge (q - p = f - e)$ $\leftarrow [0,5 \text{ pts}]$. luego por transitividad de la igualdad $m - n = f - e \iff (n, m)\mathcal{R}(e, f)$ $\leftarrow [0,5 \text{ pts}]$. Y se concluye que $\mathcal{R}$ es de equivalencia $\checkmark$.

Puntajes y comentarios para corrección

Si no se comenta las tres propiedades a probar que definen a una relación de equivalencia, pero si trabaja con cada una por separado otorgar de todas maneras los $[0,5 \text{ pts}]$ del inicio.

b) (1,5 pts.) Sea $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$ la clase de $(0, 0)$, muestre que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} = \{(p, p) : p \in \mathbb{N}\}$.

Solución:

Se tiene $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : (p, q)\mathcal{R}(0, 0)\} = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : q - p = 0\} = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p = q\} = \{(p, p) : p \in \mathbb{N}\}$ $\checkmark$. $\leftarrow [0,5 \text{ pts}]$ por la 1era, 2da y última igualdad respectivamente.

Puntajes y comentarios para corrección

Si no describe la clase y opera directamente, otorgar de todas maneras el puntaje completo de estar correcto.

c) (1,5 pts.) Pruebe que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$ es un conjunto numerable.

Solución

Hay varias maneras, algunas son

- 1) $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ es un conjunto infinito contenido en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que es numerable, luego $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ es numerable ✓
- 2) Notar que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{(p,p)\}$, es decir es unión numerable de conjuntos finitos y luego numerable ✓.
- 3) $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [(0,0)]_{\mathcal{R}}$, dada por $\varphi(p) = (p,p)$ es biyectiva, luego se tiene lo pedido ✓.

Puntajes y comentarios para corrección

Otorgar [1,5 pts] por cualquiera de las maneras de probar la numerabilidad. Desglosar (de ser necesario) el puntaje en [0,5 pts] de acuerdo a la estructura de la solución que eventualmente se aborde.

P2. a) 1) (1 pto.) Probar, sin uso de inducción (es decir por cálculo directo) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}. \quad (1)$$

Ind: Recordar que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solución

Hay dos formas de abordar este cálculo.

• Vía traslación de índices

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} &= \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right] \leftarrow [0,5 \text{ pts}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &= \binom{n+2}{3} \leftarrow [0,5 \text{ pts}] \checkmark. \end{aligned}$$

• Calculando directamente

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^{n+1} k - (1^2 - 1) \right] \leftarrow [0,5 \text{ pts}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}, \leftarrow [0,5 \text{ pts}] \checkmark. \end{aligned}$$

2) (1 pto.) Demuestre ahora (1) usando inducción.

Solución

Caso base $n = 1$: $\sum_{k=2}^2 \binom{k}{2} = \binom{3}{3} \Leftrightarrow 1 = \binom{2}{2} = \binom{3}{3} = 1 \Leftrightarrow V \leftarrow [0,2 \text{ pts}] \checkmark$.

Hipótesis y paso inductivo: Suponemos que $\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$, por demostrar $\sum_{k=2}^{n+2} \binom{k}{2} = \binom{n+3}{3} \leftarrow [0,3 \text{ pts}]$. En efecto $\sum_{k=2}^{n+2} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} + \underbrace{\binom{n+2}{2}}_{H.I} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{3} \leftarrow [0,5 \text{ pts}] \checkmark$.

Comentarios para corrección

OBS: La última igualdad se debe a la aplicación de la identidad de Pascal, considerar igualmente válido si se desarrolla los coeficientes binomiales y se llega al resultado.

b) En $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$ se define la l.c.i $*$ por $(p, q) * (r, s) = (p \cdot r, p \cdot s + q)$, donde $+$ y $\cdot$ son las operaciones usuales en $\mathbb{Q}$. Se sabe (no lo demuestre) que $*$ es asociativa en G .

1) (0,5 pts.) Encontrar (n_1, n_2) neutro para $*$ en G .

Solución

Tal $(n_1, n_2) \in G$ debe satisfacer $(n_1, n_2) * (p, q) = (p, q) * (n_1, n_2) = (p, q)$ para todo $(p, q) \in G$. Se tiene que $(n_1, n_2) * (p, q) = (n_1 p, n_1 q + n_2) = (p, q) \Leftrightarrow n_1 p = p \wedge n_1 q + n_2 = q$, luego $n_1 = 1 (p \neq 0) \wedge n_2 = 0$. Así $(n_1, n_2) = (1, 0)$ y se cumple además que $(p, q) * (1, 0) = (p, q) \leftarrow [0,5 \text{ pts}]$.

Comentarios para corrección

En el caso que la solución no se refiera a la verificación (o no lo comente) de que el neutro encontrado lo es por ambos lados, descontar [0,1 pto].

2) (1,5 pts.) Para cada $(p, q) \in G$ determine su inverso (p', q') para $*$. ¿Es (p', q') único? explique.

Solución

Sea $(p, q) \in G$, (p', q') es su inverso si $(p, q) * (p', q') = (1, 0) = (p', q') * (p, q)$. De la primera igualdad se sigue $pp' = 1 \wedge pq' + q = 0$ luego $p' = 1/p (p \neq 0)$ y $q' = -q/p \leftarrow [0,7 \text{ pts}]$. Así $(p', q') = (1/p, -q/p)$ verifica además $(1/p, -q/p) * (p, q) = (1, 0) \leftarrow [0,5 \text{ pts}]$. Por último (p', q') es único pues $*$ es asociativa en $G \leftarrow [0,3 \text{ pts}] \checkmark$.

Comentarios para corrección

Si no se verifica que el inverso encontrado cumple por ambos lados, pero esta planteado dentro de la solución descontar [0,2 pts] de los [0,5 pts] de ese ítem.

3) (0,5 pts.) Investigar si $*$ es conmutativa en G .

Solución

Si $(p, q), (r, s) \in G$ entonces $(p, q) * (r, s) = (pr, ps + q)$ y $(r, s) * (p, q) = (rp, rq + s)$ son distintos en general, $*$ no es conmutativa $\leftarrow [0,5 \text{ pts}] \checkmark$.

Comentarios para corrección

Basta con un contraejemplo que muestre que $(p, q) * (r, s) \neq (r, s) * (p, q)$, en tal caso asignar puntaje completo.

- 4) (1,5 pts.) Para $b \in \mathbb{Q}$ fijo, se define la función $f : (G, *) \rightarrow (G, *)$ dada por $f(p, q) = (p, bq)$ para cada $(p, q) \in G$. Demuestre que f es un homomorfismo.

Solución

Para $(p, q), (r, s) \in G$ se debe probar que $f((p, q) * (r, s)) = f(p, q) * f(r, s)$ $\leftarrow [0,3 \text{ pts}]$. En efecto en primer lugar $f((p, q) * (r, s)) = f(pr, ps + q) = (pr, b(ps + q))$ y por otro lado $f(p, q) * f(r, s) = (p, bq) * (r, bs) = (pr, pbs + bq) = (pr, b(ps + q))$ $\leftarrow [1 \text{ pto}]$. Se concluye que es un homomorfismo (morfismo) $\leftarrow [0,2 \text{ pts}] \checkmark$.

Comentarios para corrección

En la obtención de la igualdad $f((p, q) * (r, s)) = f(p, q) * f(r, s)$ se asigna $[0,5 \text{ pts}]$ por cada cálculo que lleva a $(pr, b(ps + q))$.