Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101 - Introducción al Álgebra. Otoño 2023.
1 de Julio

# PAUTA CONTROL 6

**P1.** Sea $(G, \star)$ un grupo Abeliano. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos los subconjuntos

$$F_n := \{g \in G \mid g^n = e\},$$

donde $e$ es el neutro del grupo $G$ y $g^n = g \star g \star \cdots \star g$ ($n$ veces).

*a*) (2 pts.) Demuestre que $F_n$ es subgrupo de $G$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Solución**

Notemos que la conmutatividad y la asociatividad permiten escribir $(x \star y)^n = x^n \star y^n$ para todo $x, y \in G$. **0.3 pts.**

1) Para todo $n$, es directo que $e^n = e$. Luego, $F_n \neq \emptyset$ pues $e \in F_n$. **0.2 pts.** Además, $F_n \subseteq G$ por definición. **0.3 pts.**

2) Por el teorema de caracterización de subgrupos, debemos chequear que si $x, y \in F_n$ entonces $x \star y^{-1} \in F_n$. Todo pasa por notar que para $y \in F_n$ se tiene

$$e \star y^n = y^n \star e = e,$$

por lo que $y^{-n} = e$ y sigue entonces

$$(x \star y^{-1})^n = x^n \star y^{-n} = e \star e = e, \quad \forall x, y \in F_n.$$

Se concluye que $F_n$ es subgrupo de $G$. **1.2 pts.**

**Puntajes y comentarios para corrección**

La parte 2) también se puede hacer utilizando la definición de subgrupo.

*b*) (2 pts.) Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 = kn_2 + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$F_{n_1} \cap F_{n_2} = \{e\}.$$

**Solución**

Por lo argumentado en la parte anterior, sabemos que $e \in F_{n_1} \cap F_{n_2}$. **0.5 pts.**
Sea $x \in F_{n_1} \cap F_{n_2}$, es decir $x^{n_1} = e$ y $x^{n_2} = e$. **0.5 pts.** Luego, podemos escribir las igualdades

$$e = x^{n_1} = x^{kn_2+1} = x^{kn_2} \star x = (x^{n_2})^k \star x = e^k \star x = e \star x = x.$$

Sigue por lo tanto que $F_{n_1} \cap F_{n_2} = \{e\}$. **1.0 pts.**

**Puntajes y comentarios para corrección**

Si se muestra solamente que $x \in F_{n_1} \cap F_{n_2} \Longrightarrow x = e$ **1.5 pts.**, hay que complementar con $F_{n_1} \cap F_{n_2} \neq \emptyset$. **0.5 pts.**

*c*) (2 pts.) Si $G = \mathbb{Z}_4$ y la l.c.i $\star$ corresponde a la suma $+_4$, calcule $F_2$ y $F_3$.

**Solución**

Escribamos $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Tenemos para la suma $+_4$ las siguientes potencias

$$
\begin{aligned}
&0^1 = 0,\ 0^2 = 0 +_4 0 = 0,\ 0^3 = 0^2 +_4 0 = 0,\\
&1^1 = 1,\ 1^2 = 1 +_4 1 = 2,\ 1^3 = 1^2 +_4 1 = 3,\\
&2^1 = 2,\ 2^2 = 2 +_4 2 = 0,\ 2^3 = 2^2 +_4 2 = 2,\\
&3^1 = 3,\ 3^2 = 3 +_4 3 = 2,\ 3^3 = 3^2 +_4 3 = 1.
\end{aligned}
$$

Luego, los subgrupos son $F_2 = \{0, 2\}$ y $F_3 = \{0\}$.

**Puntajes y comentarios para corrección**

El puntaje se distribuye uniformemente. Por ejemplo, si se hacen los cálculos mostrados arriba, asignar **0.5 pts.** por las potencias de cada elemento.

**P2.** Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo, sin divisores del cero, de tres elementos distintos, $A = \{0, 1, x\}$, donde 0 es el neutro para la l.c.i. $+$ y 1 es el neutro para $\cdot$.

*a*) (3 pts.) Complete las tablas para las operaciones $+$ y $\cdot$, justificando adecuadamente cada valor.

**Solución**

1) Por definición del neutro 0 tenemos que $0+0=0$, $0+1=1$, $0+x=x$. **0.5 pts.**

2) Como los tres elementos de $K$ son distintos, se tiene que $1+1\neq 1$ y $x+x\neq x$, pues de lo contrario estos elementos serían igual al 0.

3) Además $1+x\neq x$ pues de lo contrario tendríamos que $1=0$. Similarmente, $1+x\neq 1$ pues esto implicaría $x=0$. Se deduce que necesariamente $1+x=0$. **0.5 pts.**

4) Fijemos ahora la atención en $1+x=0$, que nos permite deducir los valores restantes. Primero, $1+1\neq 0$ pues de lo contario se tendría (sumando 1 a la igualdad previa) que $x=1$. De la misma forma, $x+x\neq 0$ pues de lo contario se tendría (sumando $x$ a la igualdad previa) que $1=x$. Juntando estos hechos con los del punto 2) se concluye finalmente que $1+1=x$, $x+x=1$ **0.5 pts.** y se tiene la tabla siguiente

| $+$ | 0 | 1 | $x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $x$ |
| 1 | 1 | $x$ | 0 |
| $x$ | $x$ | 0 | 1 |

**Cuadro 1:** Tabla de la operación $+$ en el cuerpo.

5) Por definición del neutro 1 tenemos $0\cdot 1=0$, $1\cdot 1=1$ y $1\cdot x=x$. **0.5 pts.**

6) Además, en un anillo el 0 es absorbente $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$ y $0\cdot x=0$. **0.5 pts.**

7) Finalmente, $x\cdot x\neq 0$ pues en la estructura no hay divisores del cero. Tampoco puede tenerse $x\cdot x=x$ pues esto implicaría que $x\cdot(x-1)=0$ y, como no hay divisores del cero, $x=0$ o $x=1$. Sigue que $x\cdot x=1$ **0.5 pts.** y tenemos así la siguiente tabla

| $\cdot$ | 0 | 1 | $x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | $x$ |
| $x$ | 0 | $x$ | 1 |

**Comentarios para corrección**

Acá el orden de deducción puede ser distinto, lo importante es respetar el puntaje de cada deducción. Además, es posible que algunas puedan hacerse de forma más simple.

*b*) (3 pts.) Construya explícitamente un isomorfismo $f$ entre $(A, +, \cdot)$ y alguna estructura $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$, con $p \in \mathbb{N}$ apropiado. Es decir, diga los valores $f(0)$, $f(1)$ y $f(x)$. Justifique que $f$ cumple las propiedades pedidas.

**Solución**

Como un isomorfismo es una biyección, entonces el $\mathbb{Z}_p$ apropiado debe tener tres elementos, es decir $p = 3$. **1.0 pts.**

La deducción del isomorfismo es directa, si recordamos las tablas de la suma $+_3$ y el producto $\cdot_3$

| $+_3$ | $[0]_3$ | $[1]_3$ | $[2]_3$ |
|---|---|---|---|
| $[0]_3$ | 0 | 1 | 2 |
| $[1]_3$ | 1 | 2 | 0 |
| $[2]_3$ | 2 | 0 | 1 |

| $\cdot_3$ | $[0]_3$ | $[1]_3$ | $[2]_3$ |
|---|---|---|---|
| $[0]_3$ | 0 | 0 | 0 |
| $[1]_3$ | 0 | 1 | 2 |
| $[2]_3$ | 0 | 2 | 1 |

Comparando con las tablas obtenidas para las operaciones $+$ y $\cdot$ en la parte anterior, resulta natural definir $f(0) = [0]_3$, $f(1) = [1]_3$ y $f(x) = [2]_3$, que cumplirá entonces las tres propiedades de homomorfismo. **1.0 pts.** Además, es evidente que $f$ es una función inyectiva y sobreyectiva, es decir biyectiva. **1.0 pts.**

**Comentarios para corrección**

No es necesario escribir las tablas de las operaciones $+_3$ y $\cdot_3$. Se pueden deducir los valores de $f$ ocupando solamente la definición de homomorfismo (es decir las propiedades $f(x + y) = f(x) +_3 f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot_3 f(y)$ y $f(1) = [1]_3$).
Si se sigue ese procedimiento, distribuir uniformemente **1.0 pts.** por la deducción de los valores $f(0)$, $f(1)$ y $f(x)$. Asignar **1.0 pts.** por argumentar que $f$ es biyectiva.