



PAUTA CONTROL 5

P1. a) (3 pts.) Muestre que el conjunto $A = \{q\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\}$ es numerable.

Solución: P1 a).

Hay al menos tres formas de hacer lo pedido

- 1) La función $f : \mathbb{Q} \rightarrow A$ tal que $f(q) = q\sqrt{2}$ es biyectiva, pues $q_1\sqrt{2} = q_2\sqrt{2} \implies q_1 = q_2$ (inyectividad). Y dado $x = q\sqrt{2} \in A$ se tiene $f(q) = x$ (epiyectividad). Así A y $\mathbb{Q}$ tienen el mismo cardinal, siendo conocido que $\mathbb{Q}$ es numerable ✓.
- 2) Escribiendo $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\sqrt{2}\}$. Se tiene que es una unión numerable de conjuntos finitos, luego numerable ✓.
- 3) Notar que $A \subset C = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Así A es un conjunto infinito incluído en un conjunto numerable y luego numerable. Para probar que C es numerable se puede establecer $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow C$ por $f(q_1, q_2) = q_1 + q_2\sqrt{2}$ la cual es biyectiva ✓.

Puntajes y comentarios para corrección

- 1) Por proponer una correcta biyección ← [1,5 pts], luego verificar que es biyectiva (inyectiva + epiyectiva) ← [1 pto]. Asignar [0,5 pts]. por concluir que A es numerable. Puede ser que se proponga una biyección y argumenten o expliquen porque es inyectiva y epiyectiva, asignar de todas maneras el [1 pto] en tal caso y si no descontar a lo más [0,5 pts].
- 2) Asignar [2 pts] por proponer una unión como la indicada y [1 pto] por invocar adecuadamente el resultado de unión numerable de conjuntos finitos es numerable.
- 3) Asignar [1 pto] por proponer un conjunto como el C y luego [0,5 pts] por justificar que A es infinito incluído en él, luego asignar [1 pto] por probar de alguna manera correcta que C es numerable y [0,5 pts] por concluir invocando el resultado respectivo.
- 4) También es correcto proponer $A = \mathbb{Q} \cdot \{\sqrt{2}\}$ y demostrar que ese “conjunto producto” es numerable, en tal caso asignar puntaje por la igualdad de conjuntos y por probar que lo propuesto es numerable (de alguna manera correcta).

b) (3 pts.) Probar que $B = \{\frac{n}{m}\sqrt{2} : n \text{ es un entero par y } m \text{ entero impar}\}$ es numerable.

Solución: .

- 1) Una manera es darse cuenta que $B \subset A$, con el mismo A de la parte anterior en la cual se prueba que es numerable. Como B es infinito pues el conjunto $\{\frac{n}{m}\sqrt{2} : n \text{ es un entero par y } m = 1\} \subset B$ el cual es infinito (tiene el cardinal de los pares naturales), así se concluye que B es numerable ✓.
- 2) Otra forma es expresar B como una unión numerable de conjuntos numerables, por ejemplo $B = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$ donde se define para cada k entero $B_k = \{\frac{n}{2k+1}\sqrt{2} : n \text{ es un entero par}\}$ y se cumple $B_k \subset A$ el cual es numerable por la parte anterior ✓.

Puntajes y comentarios para corrección

- 1) Por identificar y justificar que $B \subset A$ asignar [1,5 pts], luego asignar [0,5 pts] por justificar que B es infinito y [1 pto] por aplicar a este caso el resultado de infinito incluido en un numerable es numerable.
- 2) Asignar [1,5 pts] por proponer B como una unión numerable (u otra similar), luego asignar [1 pto] por probar que cada B_k (o el que se proponga en la respuesta) es numerable para finalmente otorgar [0,5 pts] por aplicar el resultado a este caso de unión numerable de numerables es numerable.

P2. Considere el siguiente conjunto de funciones

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = ax + b. \text{ Con } a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}.$$

Considerando $(\mathcal{F}, \circ)$, donde $\circ$ es la composición de funciones, se pide

- a) (1,5 pts.) Probar que $\circ$ es l.c.i en $\mathcal{F}$, es decir si $f, g \in \mathcal{F}$ entonces $f \circ g \in \mathcal{F}$.

Solución

Sean f, g en $\mathcal{F}$ tal que $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ y $a, c \neq 0$. Ciertamente $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \leftarrow [0,2 \text{ pts}]$ y en cada $x \in \mathbb{R}$ $(f \circ g)(x) = f(cx + d) = acx + ad + b \leftarrow [1 \text{ pto}]$, como $ac \neq 0 \in \mathbb{Q}$ y $ad + b \in \mathbb{Q} \leftarrow [0,2 \text{ pts}]$ se concluye que $f \circ g \in \mathcal{F} \leftarrow [0,1 \text{ pto}]$ ✓.

Comentarios para corrección

Es probable que se argumente desde el hecho que componer funciones lineales reales (o rectas en $\mathbb{R}$), en tal caso descontar sólo lo que concierne a justificar (si es que no se hace) si los coeficientes cumplen las condiciones.

- b) (1,5 pts.) Verifique que $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ (función identidad en $\mathbb{R}$) es el neutro de $\mathcal{F}$ para $\circ$

Solución

Se tiene que $\text{id}_{\mathbb{R}}(x) = 1 \cdot x + 0$ luego $\text{id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{F} \leftarrow [0,3 \text{ pts}]$, por otro lado si $f \in \mathcal{F}$ entonces $f \circ \text{id}_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}} \circ f = f \leftarrow [1 \text{ pto}]$, por ende $\text{id}_{\mathbb{R}}$ es el neutro de $\mathcal{F}$ para $\circ \leftarrow [0,2 \text{ pts}]$ ✓.

c) (1,5 pts.) Para cada $f \in \mathcal{F}$, determine su inverso f^{-1} para $\circ$. Verifique que $f^{-1} \in \mathcal{F}$.

Solución

Sea $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$ y b racionales), buscando $g \in \mathcal{F}$ con $g(x) = cx + d$ tal que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ se llega $acx + ad + b = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$ [0,5 pts], de donde $ac = 1 \wedge ad + b = 0$ y luego $d = -b/a$, $c = 1/a$ $\leftarrow$ [0,5 pts], racionales y bien definidos pues $a \neq 0$. Luego $g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \in \mathcal{F}$ $\leftarrow$ [0,2 pts] y cumple también $g(ax + b) = \frac{1}{a}(ax + b) - \frac{b}{a} = x$, es decir $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ $\leftarrow$ [0,1 pts]. Luego $g = f^{-1}$ es el inverso de f $\leftarrow$ [0,2 pts] (siendo único porque $\circ$ es asociativa) $\checkmark$.

d) Considere la función

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathcal{F}, \circ) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \cdot) \\ f &\longmapsto \varphi(f),\end{aligned}$$

en donde $(\mathbb{R}, \cdot)$ es la multiplicación de reales y para $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = ax + b$ entonces $\varphi(f) = a$.

Demuestre que para todo $f, g \in \mathcal{F}$ se tiene que $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$.

Solución

Sean $f, g \in \mathcal{F}$ tales que $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$ por la definición de φ se tiene que $\varphi(f) = a$ y $\varphi(g) = c$ $\leftarrow$ [0,5 pts]. Ahora en cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $(f \circ g)(x) = acx + ad + b$ $\leftarrow$ [0,3 pts] por lo tanto $\varphi(f \circ g) = ac$ $\leftarrow$ [0,5 pts] con lo cual se verifica finalmente que $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$ $\leftarrow$ [0,2 pts] $\checkmark$.