



Control 5

- P1. a) Sea A el conjunto de los números reales que se pueden escribir como sumas de números enteros y múltiplos enteros de $\sqrt{2}$, es decir,

$$A = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

- i) (3 pts.) Demuestre que $(A, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Solución: *Primera forma (usando el teorema de caracterización de subgrupos):* Se tiene que A no es vacío (**0,5 pts por decir que A no es vacío**) porque, por ejemplo, $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in A$ (tomando $n = 0$ y $m = 0$ en la definición de A). Además, $A \subseteq \mathbb{R}$ (**0,5 pts por decir que $A \subseteq \mathbb{R}$**) porque $n + m\sqrt{2}$ es un número real si $n, m \in \mathbb{Z}$.

Solo resta demostrar que dados $x, y \in A$, entonces $x + (-y) \in A$ para obtener que $(A, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Sean $x, y \in A$. Claramente, $x + (-y) = x - y$, por lo que debemos demostrar que $x - y \in A$. Como $x, y \in A$, existen $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $x = n + m\sqrt{2}$ e $y = p + q\sqrt{2}$. Luego,

$$\begin{aligned} x - y &= (n + m\sqrt{2}) - (p + q\sqrt{2}) && (x = n + m\sqrt{2}, y = p + q\sqrt{2}) \\ &= n + m\sqrt{2} - p - q\sqrt{2} && \text{(Aritmética de números reales)} \\ &= (n - p) + (m - q)\sqrt{2} && \text{(Aritmética de números reales)} \end{aligned}$$

Definiendo entonces $k = n - p$ y $\ell = m - q$, se tiene que $x - y = k + \ell\sqrt{2}$. Como $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$, tenemos que $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $x - y$ se puede escribir como suma de un número entero y un múltiplo entero de $\sqrt{2}$. Esto muestra que $x - y \in A$ (**1,5 pts por mostrar que $x - y \in A$**), por lo que se concluye que $(A, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ (**0,5 pts por concluir que $(A, +)$ es un subgrupo**).

Segunda forma (demostrando directamente que es un grupo por definición): Debemos ver que $A \subseteq \mathbb{R}$, que $(A, +)$ es una estructura algebraica, que la operación es asociativa, que tiene neutro y que todo elemento tiene inverso en $(A, +)$.

Tenemos que $A \subseteq \mathbb{R}$ (**0,5 pts por decir que $A \subseteq \mathbb{R}$**). En efecto, $n + m\sqrt{2}$ es un número real si $n, m \in \mathbb{Z}$.

Sigamos demostrando que $(A, +)$ es una estructura algebraica, es decir, que $+$ es una ley de composición interna en A . Sean $x, y \in A$; debemos demostrar que $x + y \in A$. Como $x, y \in A$, existen $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $x = n + m\sqrt{2}$ e $y = p + q\sqrt{2}$. Luego,

$$\begin{aligned} x + y &= (n + m\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2}) && (x = n + m\sqrt{2}, y = p + q\sqrt{2}) \\ &= (n + p) + (m + q)\sqrt{2} && \text{(Aritmética de números reales)} \end{aligned}$$

Definiendo entonces $k = n + p$ y $\ell = m + q$, se tiene que $x + y = k + \ell\sqrt{2}$. Como $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$, tenemos que $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $x + y$ se puede escribir como suma de un número entero y un múltiplo entero de $\sqrt{2}$. Esto muestra que $x + y \in A$, por lo que $(A, +)$ es una estructura algebraica (**0,5 pts por demostrar que $(A, +)$ es una estructura algebraica**).

Veamos ahora que $(A, +)$ es asociativa. Esto es directo de que la suma es asociativa en los números reales, pues $A \subseteq \mathbb{R}$ (**0,5 pts por decir que $+$ es asociativa**).

Continuamos demostrando que existe un neutro en $(A, +)$. Notemos que, si tomamos $n = 0$ y $m = 0$ en la definición de A , obtenemos que $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in A$. Además, sabemos que 0 es neutro

para la suma en los números reales, por lo que también es neutro para la suma en A , ya que $A \subseteq \mathbb{R}$ **(0,5 pts por decir que 0 es el neutro de $(A, +)$)**.

Finalmente, veamos que todo elemento de A tiene inverso en A . Sea $x \in A$. Por definición de A , existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $x = n + m\sqrt{2}$. Luego, vemos que

$$-x = -(n + m\sqrt{2}) = -n - m\sqrt{2}.$$

Tomando $k = -n$ y $\ell = -m$ obtenemos que $-x = k + \ell\sqrt{2}$. Como además $n, m \in \mathbb{Z}$, tenemos que $k, \ell \in \mathbb{Z}$, lo que muestra que $-x$ se puede escribir como suma de un número entero y un múltiplo entero de $\sqrt{2}$. Así, concluimos que $-x \in A$. Finalmente, por aritmética de números reales, sabemos que $x + (-x) = 0$ y $(-x) + x = 0$, por lo que todo elemento de $(A, +)$ tiene inverso en A **(0,5 pts por demostrar que todo elemento tiene inverso en $(A, +)$)**.

Como demostramos todo lo necesario en la definición de grupo, concluimos que $(A, +)$ es un grupo. Como además $A \subseteq \mathbb{R}$, tenemos que $(A, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ **(0,5 pts por concluir que $(A, +)$ es un subgrupo)**.

Indicaciones corrección.

- No es necesario que justifiquen detalladamente que A no es vacío o que $A \subseteq \mathbb{R}$. Es suficiente con que lo digan.
- No es necesario que justifiquen detalladamente la aritmética de números reales o hechos como que, si n, m son enteros, entonces $-n$, $n - m$ y $n + m$ son enteros. Basta con que afirmen que es verdadero. En ambas demostraciones los últimos 0,5 puntos son ya sea por concluir, o por especificar el método completo que usaron (aun cuando alguna parte intermedia esté mal justificada).

ii) (1 pts.) Se define ahora $B = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. ¿Es $(B, +)$ un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$? Justifique.

Solución:

La estructura algebraica $(B, +)$ no es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ **(0,3 pts por decir que $(B, +)$ no es un subgrupo)**, ya que no todos los elementos tienen inverso. Para corroborar esto, notemos que $(n + m\sqrt{2}) + (-n - m\sqrt{2}) = 0$ y como el inverso es único, $-n - m\sqrt{2}$ es el inverso de $n + m\sqrt{2}$. Luego, por ejemplo, para $\sqrt{2} = 0 + 1 \cdot \sqrt{2} \in B$, su inverso es $-\sqrt{2} \notin B$.

Alternativamente, se puede argumentar que, salvo cuando $m = n = 0$, se tiene que $n + m\sqrt{2} > 0$. Como los inversos de números positivos son negativos, el único elemento en B con inverso es el 0. **(0,7 pts por argumentar correctamente que $(B, +)$ no es un subgrupo)**.

Indicaciones corrección.

- Tener en cuenta que B es cerrado bajo la suma y que la operación es asociativa, ya que lo es en $\mathbb{R}$. Además contiene al neutro, ya que $0 = 0 + 0\sqrt{2}$. Por tanto, lo único que falla es la existencia de inversos.
- No es necesario que justifiquen que $-n - m\sqrt{2}$ es el inverso de $n + m\sqrt{2}$ si es que lo hicieron en el ítem anterior.
- Basta que encuentren un elemento sin inverso (no necesitan decir que todos los elementos excepto el 0 tienen inverso).

b) (2 pts.) Sea P un conjunto numerable. Demuestre que $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es numerable.

Solución: *Primera forma (por enumeración directa):* Sea $p_0, p_1, p_2, \dots$ una enumeración de P , que existe porque P es numerable. Se tiene que la siguiente es una enumeración de $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\begin{aligned} & (p_0, 1), (p_0, 2), (p_0, 3), (p_0, 4), (p_0, 5), \\ & (p_1, 1), (p_1, 2), (p_1, 3), (p_1, 4), (p_1, 5), \\ & (p_2, 1), (p_2, 2), (p_2, 3), (p_2, 4), (p_2, 5), \\ & \vdots \\ & (p_n, 1), (p_n, 2), (p_n, 3), (p_n, 4), (p_n, 5), \\ & (p_{n+1}, 1), (p_{n+1}, 2), (p_{n+1}, 3), (p_{n+1}, 4), (p_{n+1}, 5), \\ & \vdots \end{aligned}$$

(1,8 pts por mostrar una enumeración correcta).

Como la lista anterior es una enumeración y es infinita, concluimos que $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es numerable **(0,2 pts por justificar que esto es suficiente para mostrar que P es numerable).**

Segunda forma (usando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable): Tenemos que $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es infinito **(0,3 pts por decir que P es infinito)** porque contiene al conjunto $P \times \{1\}$. Este conjunto es numerable, pues la función $f: P \rightarrow P \times \{1\}$ dada por $f(p) = (p, 1)$ es biyectiva **(0,3 pts por argumentar correctamente que P es infinito)**. Así, $|P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}| \geq |\mathbb{N}|$, ya que $|\mathbb{N}|$ es el cardinal infinito más pequeño. **(0,3 pts por esta desigualdad).**

Por otro lado, se tiene que $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq P \times \mathbb{N}$ **(0,3 pts por la inclusión)**. Como $|P \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ porque el producto finito de conjuntos numerables es numerable **(0,3 pts por justificar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable)**, concluimos que $|P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}| \leq |\mathbb{N}|$ **(0,3 pts por esta desigualdad)**. Finalmente, por el teorema de Cantor–Bernstein–Schröder, se deduce que $|P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}| = |\mathbb{N}|$. Así, $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es numerable **(0,2 pts por concluir correctamente).**

Tercera forma (usando que unión finita de conjuntos numerables es numerable): Si $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tenemos que la función $f: P \rightarrow P \times \{m\}$ dada por $f(p) = (p, m)$ es biyectiva, por lo que $|P \times \{m\}| = |\mathbb{N}|$ **(0,5 pts por esta igualdad)**. Además,

$$P \times \{1, 2, 3, 4, 5\} = \bigcup_{m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}} P \times \{m\},$$

(1,0 pto por esta igualdad) de donde se concluye que $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es numerable porque la unión finita de conjuntos numerables es, a su vez, numerable **(0,5 pts por concluir correctamente).**

Cuarta forma (construyendo una biyección explícita): Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow P$ una función biyectiva, que existe porque P es numerable **(0,2 pts por tomar una función biyectiva)**. Tomemos la función $g: \mathbb{N} \rightarrow P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dada por

$$g(n) = \begin{cases} (f(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor), 1) & \text{si } [n]_5 = [0]_5 \\ (f(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor), 2) & \text{si } [n]_5 = [1]_5 \\ (f(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor), 3) & \text{si } [n]_5 = [2]_5 \\ (f(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor), 4) & \text{si } [n]_5 = [3]_5 \\ (f(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor), 5) & \text{si } [n]_5 = [4]_5. \end{cases}$$

(1,5 pts mostrar una función biyectiva correcta) Esta función es biyectiva, por lo que $|\mathbb{N}| = |P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}|$. Así, $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es numerable **(0,3 pts por concluir correctamente).**

Indicaciones corrección.

- En la primera forma no es necesario que enumeren de esa manera, incluso un diagrama que especifique como se enumeraron los elementos tiene puntaje completo.

- No es necesario citar el teorema de Cantor–Bernstein–Schröder directamente, sino que basta decir “por teorema/propiedad del apunte”.
- Es posible combinar varias formas. Por ejemplo, en la segunda o tercera forma pueden demostrar que $P \times \{1\}$ o $P \times \{m\}$ son numerables por enumeración directa en vez de exhibiendo una función biyectiva. Esto también es correcto.

P2. a) Sea (H, Δ) una estructura algebraica asociativa y con neutro $e \in H$. Sea H^* el conjunto de los elementos de H que tienen inverso para Δ , es decir,

$$H^* = \{h \in H \mid \exists u \in H, (h \Delta u = e) \wedge (u \Delta h = e)\}.$$

Se sabe (no lo demuestre) que (H^*, Δ) es una estructura algebraica asociativa.

(2 pts.) Demuestre que (H^*, Δ) es un grupo.

Solución: Debemos demostrar que (H^*, Δ) cumple con la definición de grupo. Como ya sabemos que (H^*, Δ) es una estructura algebraica asociativa, solo resta probar que tiene neutro, y que todo elemento tiene inverso (**0,2 pts por identificar qué falta por demostrar**).

Como $e \in H$ es neutro de (H, Δ) , basta ver que $e \in H^*$. Esto es verdadero porque e tiene inverso en (H, Δ) . En efecto, $e \Delta e = e$, porque e es neutro (**0,9 pts por mostrar que $e \in H^*$**).

Finalmente, debemos ver que todo elemento de (H^*, Δ) tiene inverso en (H^*, Δ) . Si $h \in H^*$, por definición de H^* , existe $u \in H$ tal que $h \Delta u = e$ y $u \Delta h = e$. Es suficiente entonces demostrar que $u \in H^*$. Esto es verdadero porque u también tiene inverso en (H, Δ) . En efecto, las mismas ecuaciones $h \Delta u = e$ y $u \Delta h = e$ muestran que h es inverso de u . Concluimos que todo elemento de (H^*, Δ) tiene inverso en (H^*, Δ) (**0,9 pts por mostrar que todo elemento en H^* tiene inverso en H^***).

Luego (H^*, Δ) cumple con la definición de grupo.

Indicaciones corrección.

- No es necesario justificar detalladamente que si u es inverso de h en (H, Δ) , entonces h es inverso de u en (H, Δ) . Es suficiente con que lo digan sin mayor justificación.
- Usar la caracterización de subgrupo es erróneo. Sin embargo, si en el camino demuestran que el inverso de u está en H^* , entonces asignar el puntaje por demostrar que todo elemento de u tiene inverso.

b) Sea $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ la estructura algebraica definida por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se sabe que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano con neutro $(0, 0)$ y tal que el inverso de $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es $-(a, b) = (-a, -b)$ (no lo demuestre).

Considere la función $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{30}$ dada por $f(a, b) = [6(a + b)]_{30}$.

i) (2 pts.) Demuestre que f es un homomorfismo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ en $(\mathbb{Z}_{30}, +_{30})$.

Solución: Veamos que f es un homomorfismo. Tenemos que, dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f((a, b) + (c, d)) &= f(a + c, b + d) && \text{(Definición de } (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \text{) - 0,5 pts)} \\ &= [6(a + c + b + d)]_{30} && \text{(Definición de } f \text{ - 0,5 pts)} \\ &= [6a + 6c + 6b + 6d]_{30} && \text{(Distributividad en } \mathbb{Z}) \\ &= [6a + 6b + 6c + 6d]_{30} && \text{(Conmutatividad en } (\mathbb{Z}, +)) \\ &= [6(a + b) + 6(c + d)]_{30} && \text{(Distributividad en } \mathbb{Z}) \\ &= [6(a + b)]_{30} +_{30} [6(c + d)]_{30} && \text{(Definición de } (\mathbb{Z}_{30}, +_{30}) \text{) - 0,5 pts)} \\ &= f(a, b) +_{30} f(c, d). && \text{(Definición de } f \text{ - 0,5 pts)} \end{aligned}$$

Se concluye que f es un homomorfismo.

Indicaciones corrección.

- No es necesario que justifiquen en detalle la aritmética en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Basta con que usen que $6(a + c + b + d) = 6(a + b) + 6(c + d)$ directamente.
- Asignar al menos

ii) (2 pts.) Sea $L = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid f(a, b) = [0]_{30}\}$. Demuestre que $(L, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

Solución: *Primera forma (usando el teorema de caracterización de subgrupos):* Se tiene que L no es vacío porque, por ejemplo, $(0, 0)$ pertenece a este conjunto **(0,4 pts por mostrar que L no es vacío)**. En efecto, $f(0, 0) = [6(0 + 0)]_{30} = [0]_{30}$. Además, L es un subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por definición **(0,4 pts por decir que L es un subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)**.

Como $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ es un grupo, podemos usar el teorema de caracterización de subgrupos para demostrar que $(L, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$. En efecto, usando el teorema, se debe demostrar que, dados $(a, b), (c, d) \in L$, entonces $(a, b) + (-(c, d)) \in L$ para obtener que $(L, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ **(0,2 pts por identificar qué se debe demostrar)**.

Sean entonces $(a, b), (c, d) \in L$. Como f es un homomorfismo por la parte anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} f((a, b) + (-(c, d))) &= f(a, b) +_{30} f(-(c, d)) && (f \text{ es un homomorfismo} - \mathbf{0,3 pts}) \\ &= f(a, b) +_{30} (-f(c, d)) && (\text{Los homomorfismos envían inversos en inversos} - \mathbf{0,3 pts}) \\ &= [0]_{30} +_{30} (-[0]_{30}) && (f(a, b) = [0]_{30} \text{ y } f(c, d) = [0]_{30} - \mathbf{0,2 pts}) \\ &= [0]_{30}. && (-[0]_{30} \text{ es el inverso de } [0]_{30} \text{ en } (\mathbb{Z}_{30}, +_{30}) - \mathbf{0,2 pts}) \end{aligned}$$

Así, vemos que $f((a, b) + (-(c, d))) = [0]_{30}$, por lo que $(a, b) + (-(c, d)) \in L$. Concluimos que $(L, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

Alternativamente, es posible demostrar esto último repitiendo cálculos de la parte i). En efecto, como $(a, b) + (-(c, d)) = (a - c, b - d)$, hay que demostrar que $(a - c, b - d) \in L$. Así,

$$\begin{aligned} f(a - c, b - d) &= [6(a - c + b - d)]_{30} && (\text{Definición de } f - \mathbf{0,2 pts}) \\ &= [6a - 6c + 6b - 6d]_{30} && (\text{Distributividad en } \mathbb{Z}) \\ &= [6a + 6b - 6c - 6d]_{30} && (\text{Conmutatividad en } \mathbb{Z}) \\ &= [6(a + b) + (-6(c + d))]_{30} && (\text{Distributividad en } \mathbb{Z}) \\ &= [6(a + b)]_{30} +_{30} [-6(c + d)]_{30} && (\text{Definición de } (\mathbb{Z}_{30}, +_{30}) - \mathbf{0,1 pts}) \\ &= [6(a + b)]_{30} +_{30} (-[6(c + d)]_{30}) && (-[x]_{30} = [-x]_{30} \text{ en } (\mathbb{Z}_{30}, +_{30}) - \mathbf{0,2 pts}) \\ &= f(a, b) +_{30} (-f(c, d)) && (\text{Definición de } f - \mathbf{0,2 pts}) \\ &= [0]_{30} +_{30} (-[0]_{30}) && ((a, b), (c, d) \in L - \mathbf{0,2 pts}) \\ &= [0]_{30}. && (-[0]_{30} \text{ es el inverso de } [0]_{30} \text{ en } (\mathbb{Z}_{30}, +_{30}) - \mathbf{0,1 pts}) \end{aligned}$$

Esto también demuestra que $(a, b) + (-(c, d)) \in L$, por lo que se concluye también que $(L, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

Segunda forma (demostrando directamente que es un grupo por definición): Debemos demostrar que $L \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $(L, +)$ cumple con la definición de grupo. Para hacer esto último hay que ver que $(L, +)$ es una estructura algebraica con una operación asociativa, que admite un neutro y que tiene inversos para todo elemento **(0,2 pts por identificar qué se debe demostrar)**.

Justifiquemos primero que $L \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esto es verdadero por definición, pues L consiste en los elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que cumplen una propiedad adicional **(0,2 pts por justificar la inclusión)**.

Continuemos demostrando que $(L, +)$ es una estructura algebraica, es decir, que $+$ es una ley de composición interna en L . Sean $(a, b), (c, d) \in L$; debemos demostrar que $(a, b) + (c, d) \in L$. Por definición de L , sabemos que $f(a, b) = [0]_{30}$ y que $f(c, d) = [0]_{30}$. Se necesita comprobar que $f((a, b) + (c, d)) = [0]_{30}$. Para esto, podemos notar que

$$\begin{aligned} f((a, b) + (c, d)) &= f(a, b) +_{30} f(c, d) && (f \text{ es un homomorfismo} - \mathbf{0,3 pts}) \\ &= [0]_{30} +_{30} [0]_{30} && (f(a, b) = [0]_{30} \text{ y } f(c, d) = [0]_{30} - \mathbf{0,1 pts}) \\ &= [0]_{30}. && ([0]_{30} \text{ es el neutro de } (\mathbb{Z}_{30}, +_{30}) - \mathbf{0,1 pts}) \end{aligned}$$

Alternativamente, es posible usar que $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ y repetir los cálculos de la parte i) para demostrar que $f(a + b, c + d) = f(a, b) +_{30} f(c, d) = [0]_{30} +_{30} [0]_{30} = [0 + 0]_{30} = [0]_{30}$ (**0,5 pts por demostrar que $(L, +)$ es una estructura algebraica.**

Continuamos viendo que $(L, +)$ es asociativa. Esto es verdadero porque $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ es asociativa y $L \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (**0,3 pts por justificar que $(L, +)$ es asociativa).**

Veamos ahora que la estructura $(L, +)$ admite un neutro. Como $(0, 0)$ es el neutro de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ y $L \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, basta ver que $(0, 0) \in L$. Esto es verdadero porque $f(0, 0) = [6(0 + 0)]_{30} = [0]_{30}$ (**0,3 pts por demostrar que $(L, +)$ tiene neutro).**

Finalmente, veamos que $(L, +)$ admite inversos. Sea $(a, b) \in L$; tenemos que $f(a, b) = [0]_{30}$.

Como f es un homomorfismo y los homomorfismos envían inversos en inversos, tenemos que $f(-(a, b)) = -f(a, b) = -[0]_{30} = [-0]_{30} = [0]_{30}$. Por lo tanto, $-(a, b) \in L$, lo que muestra que todo elemento de L tiene inverso en $(L, +)$ (**0,5 pts por demostrar que todo elemento en $(L, +)$ tiene inverso).**

Alternativamente, como $-(a, b) = (-a, -b)$, debemos demostrar que $(-a, -b) \in L$. Así,

$$\begin{aligned} f(-(a, b)) &= f(-a, -b) && (-(a, b) = (-a, -b)) \\ &= [6((-a) + (-b))]_{30} && (\text{Definición de } f - \mathbf{0,1 pts}) \\ &= [-6(a + b)]_{30} && (\text{Aritmética de números enteros}) \\ &= -[6(a + b)]_{30} && (-[x]_{30} = [-x]_{30} \text{ en } (\mathbb{Z}_{30}, +_{30}) - \mathbf{0,1 pts}) \\ &= -f(a, b) && (\text{Definición de } f - \mathbf{0,1 pts}) \\ &= -[0]_{30} && (f(a, b) = [0]_{30} - \mathbf{0,1 pts}) \\ &= [-0]_{30} && (-[x]_{30} = [-x]_{30} \text{ en } (\mathbb{Z}_{30}, +_{30})) \\ &= [0]_{30}. && (-0 = 0 \text{ en } \mathbb{Z} - \mathbf{0,1 pts por llegar a } [0]_{30}) \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $f(-a, -b) = [0]_{30}$, por lo que $(-a, -b) \in L$ y, así, todo elemento tiene inverso en $(L, +)$. Por lo tanto, como vimos que $L \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $(L, +)$ es un grupo, tenemos que $(L, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

Indicaciones corrección.

- Es posible hacer más cálculos de lo necesario, pero esto también es correcto. Por ejemplo,

$$[0]_{30} +_{30} (-[0]_{30}) = [0]_{30} +_{30} [-0]_{30} = [0]_{30} +_{30} [0]_{30} = [0 + 0]_{30} = [0]_{30},$$

en vez de decir que $(-[0]_{30})$ es el inverso de $[0]_{30}$, sirve para probar que $[0]_{30} +_{30} (-[0]_{30}) = [0]_{30}$.

- No debe haber descuento por no justificar los pasos de aritmética en $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ o $(\mathbb{Z}_{30}, +_{30})$, pero sí debe descontarse 0,3 puntos por no justificar cada vez que se usa que f es un homomorfismo.

Duración: 1h 30'.