Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101 - Introducción al Álgebra. Otoño 2023.
27 de Mayo

# CONTROL 4

**P1.** *a)* (i) (1.5 pts.) Pruebe que para todo $n \geqslant 2$ y $k \in \{2, \dots, n\}$ se tiene que:

$$(k^2 - k)\binom{n}{k} = (n^2 - n)\binom{n-2}{k-2}$$

**Solución:**

La forma directa:

$$\begin{aligned}
(k^2 - k)\binom{n}{k} &= k(k-1)\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-2)! \cdot ((n-2)-(k-2))!} \\
&= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot ((n-2)-(k-2))!} \\
&= (n^2 - n)\binom{n-2}{k-2}
\end{aligned}$$

Una forma alternativa es desarrollando ambos de lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}
(k^2 - k)\binom{n}{k} = (n^2 - n)\binom{n-2}{k-2} &\iff \frac{k(k-1) \cdot n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot (n-2)!}{(k-2)! \cdot ((n-2)-(k-2))!} \\
&\iff \frac{n!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \\
&\iff V
\end{aligned}$$

**P1.** *a*) (ii) (1.5 pts.) Utilice este resultado para calcular la suma:

$$\sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k}$$

**Solución**

Observamos que para $k=0$ y $k=1$ se tiene que $(k^2-k)\binom{n}{k}=0$, por lo que:

$$\sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k}=\sum_{k=2}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k} \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

Y reemplazando el término de la sumatoria según la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
&=\sum_{k=2}^{n}(n^2-n)\binom{n-2}{k-2}\\
&=(n^2-n)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\\
&=(n^2-n)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}\\
&=(n^2-n)\cdot 2^{n-2} \qquad \text{(1.0 punto)}
\end{aligned}$$

**Comentarios para corrección**

- Si no se hace la observación inicial, para obtener los 0.5 puntos basta que durante el desarrollo se indique que los primeros dos términos de la sumatoria $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-2}{k-2}$ son nulos.

**P1.** *b)* (3.0 pts.) Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[2^{k-1}\cdot\frac{1-k}{k(k+1)}\right].$$

*Hint:* Puede serle útil escribir la fracción como una resta de dos fracciones y hacer los ajustes necesarios para aplicar la propiedad telescópica.

**Solución**

Siguiendo la indicación, primero escribamos la fracción como una suma (o resta) tomando valores $a, b$ tales que:

$$\frac{1-k}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

Lo que lleva a que:

$$\frac{1-k}{k(k+1)} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}.$$

Por lo que $a+b=-1$ y $a=1$, y por tanto $b=-1$. De donde se concluye que:

$$\frac{1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1}.$$

Notemos que esto también se puede hacer escribiendo el numerador de forma conveniente:

$$\frac{1-k}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-2k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{2k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1}. \qquad \text{(1.0 punto)}$$

Luego, reemplazando en el término, operando y aplicando la propiedad telescópica, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\cdot\frac{1-k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left[\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2^{k-1}}{k} - \frac{2^k}{k+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2^k}{k} - \frac{2^{k+1}}{k+1}\right] \qquad \text{(1.0 punto)} \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - \frac{2^{n+1}}{n+1}\right] \\
&= 1 - \frac{2^n}{n+1} \qquad \text{(1.0 punto)}
\end{aligned}$$

**P2.** *a*) (3.0 pts.) Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un con junto con $n$ elementos. Escriba en términos de $n$ la cardinalidad del conjunto:

$$\bigcup_{i=1}^{n}[(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}]$$

*Hint:* Estudie que ocurre con $[(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}] \cap [(A \setminus \{a_j\}) \times \{a_j\}]$ cuando $i \neq j$.

**Solución**

Lo primero es notar que para $i \neq j$, $[(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}] \cap [(A \setminus \{a_j\}) \times \{a_j\}] = \emptyset$, ya que las segundas coordenadas de los elementos de estos conjuntos son $a_i$ y $a_j$, respectivamente, que son elementos distintos de $A$. (1.0 punto)

Por otro lado, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$|(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}| = |A \setminus \{a_i\}| \cdot |\{a_i\}| = (n-1) \cdot 1 = n - 1. \qquad \text{(1.0 punto)}$$

Luego, aplicamos la propiedad para la cardinalidad de unión finita de conjuntos disjuntos para concluir que:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n}[(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}] \right| &= \sum_{i=1}^{n} |(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}| \\ &= \sum_{i=1}^{n}(n-1) \\ &= n(n-1) \qquad \text{(1.0 punto)} \end{aligned}$$

**Comentarios para corrección**

- Para la primera parte no es necesario que den una demostración formal tal como: Si $(x, y) \in (A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}$ y $(w, z) \in (A \setminus \{a_j\}) \times \{a_j\}$, entonces $y = a_i \neq a_j = z$, y por tanto $(x, y) \neq (w, z)$.
- Para la segunda parte, pueden argumentar que $(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}$ es un conjunto con $n - 1$ pares ordenados, ya que la segunda coordenada es fija y la primera debe ser uno de los $n - 1$ elementos de $A \setminus \{a_i\}$.
- En la tercera parte no es necesario expresar la cardinalidad como sumatoria, ya que el énfasis es que determinen su valor.

**P2.** *b*) (3.0 pts.) Sean $E = \{1, 2, \dots, 12\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq E$. Determine la cardinalidad del conjunto formado por todos los subconjuntos de $E$ con tres elementos, cuya intersección con $A$ tiene exactamente un elemento. Es decir, calcule el cardinal del conjunto:

$$\{B \subseteq E : |B| = 3 \wedge |A \cap B| = 1\}.$$

**Solución**

Observemos que

$$\{B \subseteq E : |B| = 3 \wedge |A \cap B| = 1\} = \bigcup_{k \in A} \{B \subseteq E : |B| = 3 \wedge A \cap B = \{k\}\}.$$

y notemos que la unión de es disjunta, pues cada uno de los subconjuntos $B$ comparte exactamente un elemento con $A$. (0.5 puntos)

Ahora bien, si $A \cap B = \{k\}$, se tiene que $B = B' \cup \{k\}$ con $B' \subseteq A^c$ y $|B'| = 2$. Como $|A^c| = 7$, tenemos que para todo $k \in A$:

$$|\{B \subseteq E : |B| = 3 \wedge A \cap B = \{k\}\}| = \binom{7}{2} \qquad \text{(1.5 puntos)}$$

Con esto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} |\{B \subseteq E : |B| = 3 \wedge |A \cap B| = 1\}| &= \sum_{k=1}^{5} |\{B \subseteq E : |B| = 3 \wedge A \cap B = \{k\}\}| \\ &= \sum_{k=1}^{5} \binom{7}{2} \\ &= 5 \cdot \binom{7}{2} \qquad \text{(1.0 punto)} \end{aligned}$$

**Comentarios para corrección**

- Tener en cuenta que el argumento podría plantearse en otro orden. Por ejemplo, primero notar que hay $\binom{7}{2}$ maneras de elegir un subconjunto de $A^c$ con 2 elementos, y luego agregarle cualquiera de los 5 elementos de $A$.