PAUTA PREGUNTA 3 - CONTROL 3

a) Considere

$$G(s) = \ln\left(\frac{s^2+2s-8}{s^2+2s+10}\right).$$

Muestre que $G(s) \to 0$ cuando $s \to +\infty$, y encuentre una función continua $g(t)$, para $t > 0$, tal que $\mathcal{L}[g(t)](s) = G(s)$.

Respuesta: Asumimos que $\mathcal{L}[g(t)](s) = G(s)$, calculamos la derivada de $G(s)$ y aplicamos la propiedad correspondiente.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[tg(t)](s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[g(t)](s)\\
&= -\frac{d}{ds}\ln\left(\frac{s^2+2s-8}{s^2+2s+10}\right)\\
&= -\frac{d}{ds}\left(\ln(s+4)+\ln(s-2)-\ln(s^2+2s+10)\right)\\
&= \frac{2s+2}{s^2+2s+10}-\frac{1}{s+4}-\frac{1}{s-2}\\
&= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+9}-\frac{1}{s+4}-\frac{1}{s-2}\\
&= 2\mathcal{L}[\cos(3t)](s+1)-\mathcal{L}[e^{-4t}](s)-\mathcal{L}[e^{2t}](s)\\
&= 2\mathcal{L}[e^{-t}\cos(3t)](s)-\mathcal{L}[e^{-4t}](s)-\mathcal{L}[e^{2t}](s).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g(t) = \frac{2e^{-t}\cos(3t)-e^{-4t}-e^{2t}}{t},$$

que es continua para $t > 0$.

Distribución de puntajes:

- Aplica propiedad de la derivada c/r a s $(0,5$ pts$)$.
- Calcula la derivada y hace arreglos algebraicos necesarios $(0,3$ pts$)$.
- Reconoce transformadas conocidas $(0,4$ pts$)$.
- Aplica regla de la traslación en la variable s $(0,6$ pts$)$.
- Concluye notando además la continuidad $(0,2$ pts$)$.

b) Considere las funciones

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t-\pi & \text{si} \quad t < \pi \\ \pi & \text{si} \quad t \geq \pi \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \pi \\ e^{\pi-t}\operatorname{sen}(t) & \text{si} \quad t \geq \pi \end{cases}$$

I. Exprese φ y ψ usando funciones de Heaviside.

Respuesta:

$$\varphi(t) = (1 - H(t-\pi)) \cdot (2t - \pi) + \pi H(t-\pi).$$
$$\psi(t) = H(t-\pi) e^{\pi - t} \operatorname{sen}(t)$$

Observación: La función $H(t-\pi)$ también se puede escribir como $H_\pi(t)$.

Distribución de puntajes:

- Expresa φ (0, 5 pts).
- Expresa ψ (0, 5 pts).

II. Encuentre la transformada de Laplace $\mathcal{L}[\varphi*\psi](s)$ de la convolución de ambas funciones.

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\varphi*\psi](s) &= \mathcal{L}[\varphi](s)\cdot\mathcal{L}[\psi](s) \\
&= \mathcal{L}[(1-H(t-\pi))\cdot(2t-\pi)+\pi H(t-\pi)](s)\cdot\mathcal{L}[H(t-\pi)e^{\pi-t}\operatorname{sen}(t)](s) \\
&= \mathcal{L}[2t-\pi+H(t-\pi)\cdot(2\pi-2t)](s)\cdot\mathcal{L}[H(t-\pi)e^{\pi-t}\operatorname{sen}(t)](s) \\
&= \left(\frac{2}{s^2}-\frac{\pi}{s}+e^{-\pi s}\mathcal{L}[-2t](s)\right)\left(e^{-\pi s}\mathcal{L}[e^{-t}\operatorname{sen}(t+\pi)](s)\right) \\
&= \left(\frac{2}{s^2}-\frac{\pi}{s}-\frac{2e^{-\pi s}}{s^2}\right)\left(e^{-\pi s}\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t+\pi)](s+1)\right) \\
&= \left(\frac{2}{s^2}-\frac{\pi}{s}-\frac{2e^{-\pi s}}{s^2}\right)\left(e^{-\pi s}\mathcal{L}[-\operatorname{sen}(t)](s+1)\right) \\
&= \left(\frac{2}{s^2}-\frac{\pi}{s}-\frac{2e^{-\pi s}}{s^2}\right)\left(-e^{-\pi s}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right)
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- Aplica fórmula de la derivada de la convolución (0, 3 pts).
- Aplica propiedad de traslación en la variable t (donde aparecen funciones de Heaviside) (0, 3 pts).
- Aplica propiedad de traslación en la variable s (0, 2 pts).
- Calcula transformadas conocidas (potencia de t, seno) (0, 2 pts).

III. Usando antitransformada de Laplace, calcule la convolución $\varphi*\psi$.

Respuesta: Desarrollamos la expresión obtenida en la parte anterior

$$\mathcal{L}[\varphi*\psi](s) = e^{-\pi s}\frac{\pi}{s(s^2+2s+2)} - e^{-\pi s}\frac{2}{s^2(s^2+2s+2)} + e^{-2\pi s}\frac{2}{s^2(s^2+2s+2)}.$$

Notamos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{s(s^2+2s+2)} &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(t)](s+1) - \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s+1)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\big(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)](s) - \mathcal{L}[e^{-t}\operatorname{sen}(t)](s)\big) \\
&= \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[1 - e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)](s).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{s^2(s^2+2s+2)} &= \frac{s+1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \\
&= \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \\
&= \mathcal{L}[\cos(t)](s+1) + \mathcal{L}[t](s) - \mathcal{L}[1](s) \\
&= \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)](s) + \mathcal{L}[t](s) - \mathcal{L}[1](s) \\
&= \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t) + t - 1](s).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\varphi * \psi](s) &= e^{-\pi s}\frac{\pi}{s(s^2+2s+2)} - e^{-\pi s}\frac{2}{s^2(s^2+2s+2)} + e^{-2\pi s}\frac{2}{s^2(s^2+2s+2)} \\
&= e^{-\pi s}\frac{\pi}{2}\mathcal{L}[1 - e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)](s) \\
&\quad - e^{-\pi s}\mathcal{L}[e^{-t}\cos(t) + t - 1](s) \\
&\qquad + e^{-2\pi s}\mathcal{L}[e^{-t}\cos(t) + t - 1](s) \\
&= \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[H(t-\pi)\cdot(1 - e^{-t+\pi}\cos(t-\pi) - e^{-t+\pi}\operatorname{sen}(t-\pi))](s) \\
&\quad - \mathcal{L}[H(t-\pi)\cdot(e^{-t+\pi}\cos(t-\pi) + t - \pi - 1)](s) \\
&\qquad + \mathcal{L}[H(t-2\pi)\cdot(e^{-t+2\pi}\cos(t-2\pi) + t - 2\pi - 1)](s) \\
&= \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[H(t-\pi)\cdot(1 + e^{-t+\pi}\cos(t) + e^{-t+\pi}\operatorname{sen}(t))](s) \\
&\quad - \mathcal{L}[H(t-\pi)\cdot(-e^{-t+\pi}\cos(t) + t - \pi - 1)](s) \\
&\qquad + \mathcal{L}[H(t-2\pi)\cdot(e^{-t+2\pi}\cos(t) + t - 2\pi - 1)](s).
\end{aligned}
$$

y aplicando antitransformada obtenemos

$$
\begin{aligned}
\varphi * \psi\,(t) &= \frac{\pi}{2}H(t-\pi)\cdot(1 + e^{-t+\pi}\cos(t) + e^{-t+\pi}\operatorname{sen}(t)) \\
&\quad - H(t-\pi)\cdot(-e^{-t+\pi}\cos(t) + t - \pi - 1) \\
&\qquad + H(t-2\pi)\cdot(e^{-t+2\pi}\cos(t) + t - 2\pi - 1).
\end{aligned}
$$

Distribución de puntajes:

- Usa linealidad de la transformada $(0,1 \text{ pts})$.
- Aplica fracciones parciales $(0,2 \text{ pts})$.
- Realiza los arreglos algebraicos necesarios $(0,2 \text{ pts})$.
- Reconoce transformadas de funciones conocidas $(0,3 \text{ pts})$.
- Aplica propiedad de traslación en la variable s $(0,5 \text{ pts})$.
- Aplica propiedad de traslación en la variable t (funciones Heaviside) $(0,5 \text{ pts})$.
- Aplica antitransformada y concluye $(0,2 \text{ pts})$.