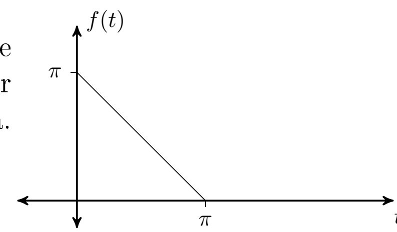
PAUTA PREGUNTA 2 - CONTROL 3

Sea $z(t)$, para $t \geq 0$, la posición de un oscilador armónico que se encuentra en reposo para $t = 0$, y satisface la ecuación

$$z'' + 2z' + 2z = f(t),$$

donde $f(t)$ es un forzamiento no nulo sólo para $t \in [0, \pi[$. Este forzamiento comienza valiendo π en $t = 0$, para luego decaer linealmente hasta cero en $t = \pi$, como se muestra en la figura.



a) Exprese $f(t)$ usando funciones de Heaviside.

Respuesta: La función lineal que une los puntos $(0, \pi)$ y $(\pi, 0)$ es $y = \pi - t$, por lo tanto

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \pi - t & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad t \geq \pi \end{cases}$$

En términos de funciones de Heaviside

$$f(t) = (H(t) - H(t - \pi)) \cdot (\pi - t)$$

(también $H(t)$ se puede escribir como $H_0(t)$, y $H(t - \pi)$ como $H_\pi(t)$).

Distribución de puntajes:

- Determina la función lineal $(0,2$ pts$)$.
- Expresa usando funciones de Heaviside $(0,3$ pts$)$.

OBS: La expresión $f(t) = (1 - H(t - \pi)) \cdot (\pi - t)$ no es correcta, pero no va influir en el cálculo de la transformada más adelante, y es igual a la expresión buscada para $t \geq 0$. Descuéntese 0,1 sólo en caso de que el alumno no haga esta observación.

b) Encuentre la transformada de Laplace $\mathcal{L}[z(t)](s)$ de la solución de la ecuación del oscilador.

Respuesta: Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación del oscilador. Como el oscilador parte del reposo, $z(0^+) = 0$ y $z'(0^+) = 0$.

$$\begin{aligned} z'' + 2z' + 2z &= (H(t) - H(t - \pi)) \cdot (\pi - t) \\ s^2\mathcal{L}[z](s) - sz(0^+) - z'(0^+) + 2s\mathcal{L}[z](s) - 2z(0^+) + 2\mathcal{L}[z](s) &= \mathcal{L}[H(t)(\pi - t)](s) \\ &\quad - \mathcal{L}[H(t - \pi)(\pi - t)](s) \\ (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[z](s) &= \mathcal{L}[\pi - t](s) - e^{-\pi s}\mathcal{L}[-t](s) \\ (s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}[z](s) &= \frac{\pi}{s} - \frac{1}{s^2} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}[z(t)](s) = \frac{\pi}{s(s^2+2s+2)} - \frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2(s^2+2s+2)}$$

Distribución de puntajes:

- Linealidad de la transformada (0,2 pts).
- Transformada de la 1ra y 2da derivada (0,6 pts).
- Transformada de traslación en la variable t (con funciones de Heaviside) (0,6 pts).
- Transformada de constantes y potencias de t (0,4 pts).
- Despeja $\mathcal{L}[z(t)](s)$ (0,2 pts).

c) Encuentre la solución $z(t)$, para $t \geq 0$, muestre que es continua y que para $t > \pi$

$$z(t) = -\left(\frac{1+\pi+e^{\pi}}{2}\right)e^{-t}\cos(t) - \frac{\pi}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(t).$$

Solución: Buscamos la transformada inversa para cada uno de los términos en la suma obtenida al final de la parte anterior, y después aplicamos la linealidad de la transformada.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{s(s^2+2s+2)} &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(t)](s+1) - \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s+1)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)](s) - \mathcal{L}[e^{-t}\operatorname{sen}(t)](s)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[1 - e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)](s).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{s+1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[\cos(t)](s+1) + \mathcal{L}[t](s) - \mathcal{L}[1](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)](s) + \mathcal{L}[t](s) - \mathcal{L}[1](s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-t}\cos(t) + t - 1](s).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^{-\pi s}\frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} &= \frac{e^{-\pi s}}{2}\mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)+t-1](s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}[H(t-\pi)\cdot(e^{-t+\pi}\cos(t-\pi)+t-\pi-1)](s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}[H(t-\pi)\cdot(-e^{-t+\pi}\cos(t)+t-\pi-1)](s).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[z(t)](s) &= \frac{\pi}{s(s^2+2s+2)} - \frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} \\
&= \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[1-e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\operatorname{sen}(t)](s) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-t}\cos(t)+t-1](s) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\mathcal{L}[H(t-\pi)\cdot(-e^{-t+\pi}\cos(t)+t-\pi-1)](s),
\end{aligned}
$$

y así

$$
\begin{aligned}
z(t) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\operatorname{sen}(t)) - \frac{1}{2}(e^{-t}\cos(t)+t-1) \\
+ \frac{1}{2}(H(t-\pi)\cdot(-e^{-t+\pi}\cos(t)+t-\pi-1)).
\end{aligned}
$$

Ahora la continuidad para $t \geq 0$. El único valor de t para el cual $z(t)$ podría tener un salto es $t=\pi$, así que analizaremos los límites laterales $\lim\limits_{t\to\pi^+} z(t)$ y $\lim\limits_{t\to\pi^-} z(t)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\pi^-} z(t) &= \lim_{t\to\pi}\frac{\pi}{2}(1-e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\operatorname{sen}(t)) - \frac{1}{2}(e^{-t}\cos(t)+t-1) \\
&= \frac{\pi}{2}(1+e^{-\pi}) - \frac{1}{2}(-e^{-\pi}+\pi-1). \\
\lim_{t\to\pi^+} z(t) &= \lim_{t\to\pi}\frac{\pi}{2}(1-e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\operatorname{sen}(t)) - \frac{1}{2}(e^{-t}\cos(t)+t-1) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(-e^{-t+\pi}\cos(t)+t-\pi-1) \\
&= \frac{\pi}{2}(1+e^{-\pi}) - \frac{1}{2}(-e^{-\pi}+\pi-1) + \frac{1}{2}(1+\pi-\pi-1) \\
&= \frac{\pi}{2}(1+e^{-\pi}) - \frac{1}{2}(-e^{-\pi}+\pi-1).
\end{aligned}
$$

Son iguales. Así que $z(t)$ es continua para $t \geq 0$.

Finalmente, para $t > \pi$,

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{\pi}{2}(1-e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\operatorname{sen}(t)) - \frac{1}{2}(e^{-t}\cos(t)+t-1) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(-e^{-t+\pi}\cos(t)+t-\pi-1) \\
&= \left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{\pi}\right)e^{-t}\cos(t) - \frac{\pi}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(t).
\end{aligned}
$$

Distribución de puntajes: El puntaje se otorga por manejar correctamente lo siguiente:

- Uso de fracciones parciales $(0,4$ pts$)$.
- Manipulación algebraica adicional de las expresiones $(0,3$ pts$)$.
- Aplicar la linealidad de la transformada $(0,2$ pts$)$.
- Reconocer transformadas conocidas (seno, coseno y constantes) $(0,7$ pts$)$.
- Reconocer transformadas trasladadas en la variable s y aplicar la propiedad de traslación correspondiente $(0,7$ pts$)$.
- Aplicar la propiedad de traslación en la variable t (donde aparecen funciones de Heaviside) $(0,6$ pts$)$.
- Analizar la continuidad en $t = \pi$ $(0,3$ pts$)$.
- Reemplazar los valores de $H(t-\pi)$ (o, equivalentemente, $H_\pi(t)$) para $t > \pi$ y $t < \pi$ tanto en los límites laterales como para la expresión final $(0,3$ pts$)$.