PAUTA PREGUNTA 1 - CONTROL 3

a) Resuelva el siguiente sistema de EDO usando el método de la matriz exponencial:

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = 1 \\ x_2' &= 3x_1 - x_2, \quad x_2(0) = -3 \end{aligned}$$

y verifique que la solución tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Solución: Valores propios $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 5$ (0.25 pto). Vectores propios: $v_1 = (1, -3)$, $v_2 = (2, 1)$ (0.5 pto) u otros proporcionales a estos (en este caso hay que seguir los cálculos, por ejemplo $v_1 = (-1, 3)$, $v_2 = (4, 2)$ también es correcto). De donde (matrices y fórmula para la exponencial 0.25 ptos)

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{pmatrix}$$

(cálculo de la exponencial 0.5 ptos) luego la solución y su límite son (solución y límite 0.5 ptos)

$$e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nota: Esto también se puede justificar pues la condición inicial es un vector propio asociado al valor propio -2 de parte real negativa. Si alguien dice eso está correcto.

Distribución de puntajes:

- Cálculo de valores propios $(0,25$ pts$)$.
- Cálculo de vectores propios $(0,5$ pts$)$.
- Fórmula de diagonalización $(0,25$ pts$)$.
- Cálculo de la exponencial $(0,5$ pts$)$.
- Solución y límite $(0,5$ pts$)$.

b) Considere para $t > 0$ el sistema de ecuaciones a coeficientes variables:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\dfrac{2}{t^2}x + \dfrac{2}{t}y. \end{cases}$$

Muestre que

$$M(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental para el sistema y encuentre una solución del sistema anterior que satisfaga en $t = 1$ las condiciones iniciales $x(1) = 2$, $y(1) = 3$.

Solución: La matriz $M(t)$ es fundamental si se cumple $M'(t) = A(t)M(t)$ (0.5 ptos) donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

es la matriz de coeficientes del sistema (0.25 ptos). Verificando (0.25 ptos):

$$M'(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(t)M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución homogénea tiene la forma (0.5 ptos)

$$X = M(t)C$$

donde $X = (x, y)$ y $C = (c_1, c_2)$ es un vector de constantes a determinar. Estas se obtienen de la condición :

$$X(1) = M(1)C$$

de donde $(2, 3) = (c_1 + c_2, 2c_1 + c_2)$ y por lo tanto $c_1 = c_2 = 1$ (0.25 ptos). Finalmente (0.25 ptos):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

Distribución de puntajes:

- Condición de matriz fundamental $(0, 5 \text{ pts})$.
- Obtención de la matriz de coeficientes del sistema $(0, 25 \text{ pts})$.
- Verificar condición $(0, 25 \text{ pts})$.
- Expresión para la solución homogénea del sistema $(0, 5 \text{ pts})$.
- Obtención de las constantes $(0, 25 \text{ pts})$.
- Obtención explícita de la solución homogénea del sistema $(0, 25 \text{ pts})$.

c) Usando la matriz fundamental de la parte anterior, encuentre una solución particular para el sistema a coeficientes variables no homogéneo siguiente:

$$\begin{cases} x' &= y + t^2 \\ y' &= -\dfrac{2}{t^2}x + \dfrac{2}{t}y + t^3. \end{cases}$$

Solución: La solución particular $X_p = (x_p, y_p)$ tiene la forma

$$X_p = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) ds$$

donde $B(t) = (t^2, t^3)$ es el lado derecho del sistema (0.5 ptos). Los límites de integración pueden ser distintos, por ejemplo la integral de 1 a t y eso es también correcto. Esto es:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} s^2 & s \\ 2s & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} ds$$

de donde integrando y evaluando:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \frac{-1}{s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -2s & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} ds$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^t (-1+s^2) ds \\ \int_0^t (2s-s^3) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t + t^3/3 \\ t^2 - t^4/4 \end{pmatrix}$$

se llega a que (inversa 0.25 ptos, integrales 1.0 pto, álgebra 0.25 ptos):

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} t^5 \\ -t^2 + \frac{5}{12} t^4 \end{pmatrix}.$$

Nota: en caso de tomar otros límites de integración la solución va a diferir de lo anterior salvo por una solución homogénea que se suma (ver parte a)) es decir si se suma $c_1 t^2 + c_2 t$ a x_p y se suma $2c_1 t + c_2$ a y_p, donde c_1 y c_2 son constantes cualesquiera, la solución particular obtenida también es correcta.

Distribución de puntajes:

- Expresión para la solución particular del sistema $(0,5$ pts$)$.
- Inversa $(0,25$ pts$)$.
- Integrales $(1,0$ pto$)$.
- Álgebra $(0,25$ pts$)$.