[P1] a) $x \mapsto f(x) = x^{3/2}$, $\Rightarrow \mathcal{L}[f](s) < \infty$

Claramente $f$ es continua y de O.E

PROP $n=2$

Se tiene que $\mathcal{L}[x^{3/2}](s) = \mathcal{L}[x^{2} \cdot x^{-1/2}](s) = (-1)^2 \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\mathcal{L}[x^{-1/2}]\right)$

(0,5) pts (0,5) pts

$$= \frac{d^2}{ds^2}\Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{s}}}_{\text{DERIVABLE } \forall s>0}\Bigg) = \boxed{\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{4}\,\frac{1}{s^{5/2}}} \quad \forall s>0 \leftarrow (1\ \text{pto})$$

DATO

5/2

b) $x \mapsto f(x)$ tq $\mathcal{L}[f(x)](s) = \dfrac{s-7}{s^2-14s+73}$

(0,5) pts

Lerch salvo pros discont.

Se tiene $s^2-14s+73 = (s-7)^2 + (\sqrt{24})^2$, luego

cont de O.E

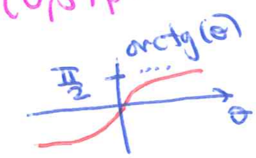
$$\frac{s-7}{(s-7)^2+(\sqrt{24})^2} \overset{(0,5)\ \text{pts}}{=} \mathcal{L}[g(x)](s-7) \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{7x}\cos(\sqrt{24}\,x),\ x\in\mathbb{R}}$$

cumple $\mathcal{L}[f] = \dfrac{s-7}{s^2-14s+73}$

(0,5) pts.

DESFASE EN 7 DE $g(x) = \cos(wx)$

$w = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$




c) $s \mapsto F(s) = \operatorname{arctg}(s)$, $s>0$

c.1) Notamos que $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = \pi/2 \neq 0 \Rightarrow$ NO cumple la cond necesaria!!

(0,5) pts

c.2) Se propone $G(s) \overset{(0,5)\ \text{pts}}{=} \pi/2 - \operatorname{arctg}(s)$, (cumple $G(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$)

c.3) luego $\underbrace{\dfrac{d}{ds}(G(s))}_{-\frac{1}{1+s^2}} = -\mathcal{L}[xf(x)]$ (0,5) pts

$-\dfrac{1}{1+s^2} = \mathcal{L}[-\operatorname{sen} x]$ (0,5) pts

Lerch $\Rightarrow$ $\boxed{x \mapsto f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$ es continua y de O.E

(0,5) pts

OBS: TB SIRVE $G = \operatorname{arctg}(s) - \pi/2$ $\Rightarrow f(x) = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

[P2] Resolver, aplicando T.L y sus propiedades

$$y'' + 2xy' - 4y = 1 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \; .//$$

Sol → Aplicando T.L ambos lados: $\mathcal{L}[y'' + 2xy' - 4y] = \mathcal{L}[1]$, luego

(0,5) pts

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[xy'] - 4\mathcal{L}[y] = 1/s \;,\; s>0$$

(1 pto)

$$\Leftrightarrow s^2\mathcal{L}[y] - s\underbrace{y(0^+)}_{=0} - \underbrace{y'(0^+)}_{=0} + 2\cdot(-1)\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[y']\right) - 4\mathcal{L}[y] = 1/s$$

(0,5) pts

$$\Leftrightarrow \underbrace{s^2\mathcal{L}[y] - 2\cdot\frac{d}{ds}\left(s\mathcal{L}[y] - \cancel{y(0^+)}^{=0}\right) - 4\mathcal{L}[y]}_{(s^2-6)\cdot\mathcal{L}[y] - 2s\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y])} = 1/s$$

Notemos $F(s) = \mathcal{L}[y](s)$, $s>0$

(0,5) pts

$$\Rightarrow \frac{dF}{ds}(s) - \left(\frac{s}{2} - \frac{3}{s}\right)F(s) = \frac{-1}{2s^2} \;,\; s>0$$

→ EDO lineal 1er orden para $F(s)$ con var indep. $s$

(0,5) pts (F.I)

Factor integrante → $\phi = e^{-\int\left(\frac{s}{2}-\frac{3}{s}\right)ds} = s^3 e^{-s^2/4}$ //, luego

$$\Rightarrow F(s) = \frac{e^{s^2/4}}{s^3}\left(-\underbrace{\int \frac{s}{2}e^{-s^2/4}ds}_{=e^{-s^2/4}} + C\right)$$

Sustitución $u = -s^2/4 \Rightarrow du - -\frac{2}{s}ds$

(0,5) pts

(0,5) pts

$$= \underbrace{\frac{e^{s^2/4}\cdot C}{s^3} + \frac{1}{s^3}}_{\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0} \Rightarrow \text{obliga a determinar } \boxed{C=0}$$

Para que se cumpla $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ (1 pto)

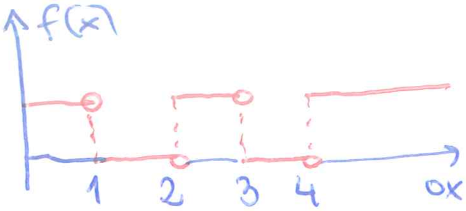
(0,5) pts

$\Rightarrow F(s) = 1/s^3$, $s>0$

$\Rightarrow x \mapsto y(x) = \frac{x^2}{2}$ soluc continua

(0,5) pts

[P3] a)




$$\Rightarrow \boxed{f(x) = H_0(x) - H_1(x) + H_2(x) - H_3(x) + H_4(x)}$$

(1 pto)

$\Rightarrow$ Aplicando T.L a la EDO y usamos las c.i $\quad \mathcal{L}[H_a] = e^{-as}/s$

$$\underbrace{\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y]} = \mathcal{L}[H_0 - H_1 + H_2 - H_3 + H_4] = \underbrace{\frac{1}{s}\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s}\right)}$$

(0,5 pts)

$$s^2\mathcal{L}[y] - s\,\cancel{y(0^+)}^{=0} - \cancel{y'(0^+)}^{=0} - 3\left(s\mathcal{L}[y] - \cancel{y(0^+)}^{=0}\right) + 2\mathcal{L}[y]$$

$$\Rightarrow \underbrace{(s^2 - 3s + 2)}_{(s-1)(s-2)}\mathcal{L}[y] = 1/s\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s(s-1)(s-2)}\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s}\right) \quad (*)$$

(1 pto)

Sea $\varphi(s) = \dfrac{1}{s(s-1)(s-2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s-2} = \dfrac{1}{2s} - \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{2(s-2)}$

(Fracc parciales)

(0,5 pts)

$$\Rightarrow \varphi(s) = 1/2\,\mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[e^x] + 1/2\,\mathcal{L}[e^{2x}] = \mathcal{L}[\underbrace{1/2 - e^x + 1/2\,e^{2x}}_{f(x)}]$$

Para los otros términos en (*) usamos la propiedad de traslación $\mathcal{L}[H_a(x) f(x-a)] = e^{-sa}\mathcal{L}[f]$ con $a = 1,2,3,4$. Luego se llega a:

$$x \mapsto y(x) = 1/2 - e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - H_1(x)\left(1/2 - e^{x-1} + 1/2\,e^{2(x-1)}\right)$$
$$+ H_2(x)\left(1/2 - e^{x-2} + 1/2\,e^{2(x-2)}\right) - H_3(x)\left(1/2 - e^{x-3} + 1/2\,e^{2(x-3)}\right)$$
$$+ H_4(x)\left(1/2 - e^{x-4} + 1/2\,e^{2(x-4)}\right)$$

(1 pto)

b) $y'' + y = \delta_{\pi}(x) - \delta_{2\pi}(x)$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Aplicamos T.L usamos las c.i y $\mathcal{L}[\delta_a(x)] = e^{-sa}$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y]}_{s^2\mathcal{L}[y] - s\cdot \cancel{y(0^+)}^{=0} - \underbrace{y'(0^+)}_{=1} + \mathcal{L}[y]} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$$

$$(s^2+1)\mathcal{L}[y] = 1 + e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+1}\left(1 + e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}\right)$$

(1 pto)

usando $\mathcal{L}[H_a(x) f(x-a)]$, llegamos a

con $f(x) = \operatorname{sen} x$

$a = \pi, 2\pi$

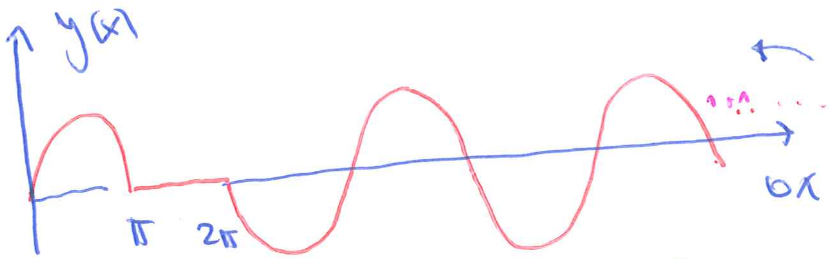
$$x \mapsto y(x) = \operatorname{sen} x + H_{\pi}(x)\underbrace{\operatorname{sen}(x-\pi)}_{= -\operatorname{sen} x} - H_{2\pi}(x)\underbrace{\operatorname{sen}(x-2\pi)}_{= \operatorname{sen}(x)}$$

$$\Rightarrow x \mapsto y(x) = \operatorname{sen} x - H_{\pi}(x)\operatorname{sen} x - H_{2\pi}(x)\operatorname{sen} x$$

$$= \operatorname{sen} x\left(1 - H_{\pi}(x) - H_{2\pi}(x)\right)$$

alguna de ellas

(0,5) pts



$$\begin{cases} \operatorname{sen} x & x \in [0, \pi[ \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi[ \\ -\operatorname{sen} x & x \geq 2\pi \end{cases}$$

solución continua de O.E!

(0,5) pts