

P1

$$Y' = AY, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el sistema primero.

Paso 1) Valores propios de A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 (3-\lambda) + (3-\lambda)$$
$$= (3-\lambda) \{ (2-\lambda)^2 + 1 \} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \text{ o } (2-\lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i$$

(O5 por la verificación de los autovalores)

Paso 2) Vectores propios:

$$\bullet \lambda = 3: (A - 3I)v = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 - v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_1 = v_2 = -v_2 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = 0$$

$$\text{Sea } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3.$$

(1,0 por obtener el vector propio correctamente)

$$\bullet \lambda = 2+i: (A-(2+i)I)w = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -iw_1 + w_2 = 0 \\ -w_1 - iw_2 = 0 \\ (1-i)w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_2 = iw_1, w_3 = 0$$

$$\text{Sea } w = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2 \quad (\text{O.S. por la comprobación})$$

Luego, una solución compleja es dada por:

$$\begin{aligned} e^{dt} w &= e^{(2+i)t} (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2) = e^{2t} e^{it} (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2) \\ &= e^{2t} (\cos t + i \sin t) (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2) \\ &= e^{2t} \{ \cos t \vec{e}_1 - \sin t \vec{e}_2 \} + i e^{2t} \{ \sin t \vec{e}_1 + \cos t \vec{e}_2 \} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + i e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 + i y_2, \end{aligned}$$

(1, 0 por obtener las soluciones reales)

Otra, encontramos 2 soluciones reales y_1, y_2 . La tercera solución real es dada por $y_3 = e^{3t} \vec{e}_3$, y por lo tanto la solución general viene dada por:

$$y(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O bien,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ e^{2t} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

(No por obtener la solución correcta)

Observamos que la solución entregada por el Chat en ese caso no corresponde a una solución de un sistema en dimensión 3, en el sentido de que la solución que entrega presenta 3 soluciones que no son L.I. en $\mathbb{R}^3$, una vez que son soluciones en $\mathbb{R}^2$, con la tercera coordenada igual que 0.

Su error principal fue entregar el vector $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erróneamente como se fuera vector propio asociado al

valor propio 3. De hecho,

$$A v_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Otra forma de justificar es derivar la solución entregada por el chat y verificar que no satisface el sistema $Y' = AY$, por ejemplo,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + e^{2t} C_2 \sin t - e^{2t} C_3 \cos t \\ C_1 e^{3t} + e^{2t} C_2 \cos t + e^{2t} C_3 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{con } C_2 = C_3 = 0 \\ \text{y } C_1 = 1 \end{matrix}$$

Es dado por $y_0(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y tenemos

$$A y_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 3e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} = y_0'.$$

(Lo podemos identificar que la expresión dada no es solución)
o bien por detectar que el vector propio no es correcto)

P2

$$Y' = AY, \text{ con } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(0,5) (a) Valores propios de A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda+1 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{2}$$

Tenemos 2 valores propios reales: $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}$.

(1,0) (b) $\alpha = \frac{1}{4}$: En ese caso los valores propios son

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

Después de un cambio de base, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$
Y en la base canónica tenemos el siguiente

plano de fases de las soluciones generadas por

$$X_1 = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = e^{-\frac{3t}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

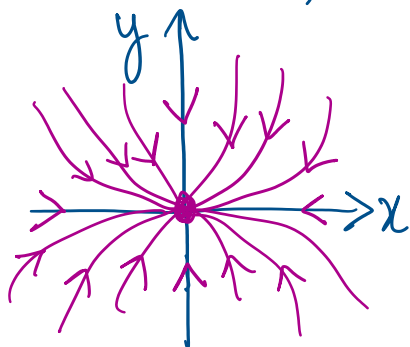
y para $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, tenemos:

$$X(t) = x_0 X_1 + y_0 X_2 = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t/2} \\ y_0 e^{-3t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{o sea, } \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t/2} \\ y(t) = y_0 e^{-3t/2} \end{cases} \Rightarrow x^3(t) = x_0^3 e^{-3t/2}$$

$$\Rightarrow y = y_0 e^{-3t/2} = \frac{y_0}{x_0^3} \underbrace{x_0^3 e^{-3t/2}}_{x^3} = \frac{y_0}{x_0^3} x^3, \text{ es decir}$$

$y(x) = C_0 x^3$. Por lo tanto, en el plano de fases (x, y) , tenemos:



$\begin{cases} 0,5 \text{ por las parábolas} \\ 0,5 \text{ por las rectas} \end{cases}$

(1.5) (c) $\lambda = 4$: En ese caso los valores propios son:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$$

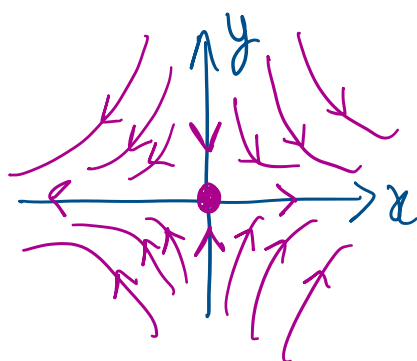
Además, la diagonalización de A se ve como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y las soluciones son generadas por:

$$X_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y como antes,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ y_0 e^{-3t} \end{pmatrix}, \text{ de donde}$$

$y(x) = C_0 x^{-3}$, cuyo plano de fases se refleja en la base canónica vía:



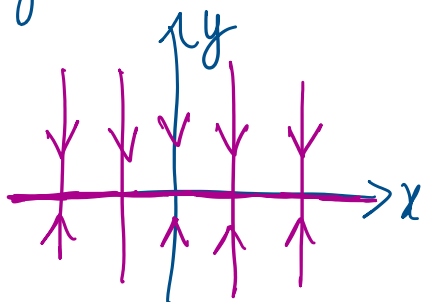
$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \text{ por las hipérbolas} \\ 0,5 \text{ por las rectas en } x \\ 0,5 \text{ por las rectas en } y \end{array} \right.$

(1,5) (d) El valor de transición de α es lo que hace con que

$\lambda_1 = -1 + \sqrt{\alpha}$ pase de negativo a positivo, o sea
cuando $\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$. (0,5)

En ese caso, tenemos valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$.

En la base canónica, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 e^{-2t} \end{pmatrix}$,
lo que se ve gráficamente como:



$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \text{ por las rectas} \\ 0,5 \text{ por las rectas} \end{array} \right.$

(1.5) (e) Como A es diagonalizable, $A = PDP^{-1}$, donde

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} Av = d_1 v \\ Aw = d_2 w \end{cases}, \quad \begin{matrix} d_1 = -1 + \sqrt{2} \\ d_2 = -1 - \sqrt{2} \end{matrix}$$

Entonces:

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

(0,5 hasta aquí y decir quien es P)

Encontramos vectores propios: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.

$$\bullet (A - d_1 I)v = (A + (1 - \sqrt{2})I)v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}v_1 - v_2 = 0 \\ -2v_1 - \sqrt{2}v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = -\sqrt{2}v_1, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet (A - d_2 I)w = (A + (1 + \sqrt{2})I)w = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}w_1 - w_2 = 0 \\ -2w_1 + \sqrt{2}w_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_2 = \sqrt{2}w_1, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \det P = 2\sqrt{2}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$e^{tA} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} & e^{(-1-\sqrt{2})t} \\ \sqrt{2} e^{(-1+\sqrt{2})t} & \sqrt{2} e^{(-1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} e^{(-1+\sqrt{2})t} + \sqrt{2} e^{(-1-\sqrt{2})t} & -e^{(-1+\sqrt{2})t} + e^{(-1-\sqrt{2})t} \\ -2 e^{(-1+\sqrt{2})t} + 2 e^{(-1-\sqrt{2})t} & \sqrt{2} e^{(-1+\sqrt{2})t} + \sqrt{2} e^{(-1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$$

(0,5 por los cálculos)

Acá, la matriz fundamental e^{tA} sirve para encontrar la única solución del (PVI) $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ la cual es

dada por $y(t) = e^{tA} y_0$, o bien, para componer la solución general de $y' = Ay$ vía $y(t) = e^{tA} \vec{c}$.

Finalmente, las soluciones X que hemos dibujado están relacionadas con y vía $X = P^{-1} y$. (0,5)

(De hecho, X satisface la ecuación $X' = DX$, o bien el (PVI) $\begin{cases} X' = DX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$, con $X_0 = P^{-1} y_0$.)

P3

$$Y' = AY + G(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G(t) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(20) Paso 1) Resolver el problema homogéneo $Y' = AY$:

Primero buscamos los valores propios de A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + \lambda^2 - 2\lambda - 4\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Encontramos los vectores propios asociados a $\lambda = 3$:

$$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{v_1 = v_2}$$

De acá tomamos $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y vemos que, de tener un solo grado de libertad, el autospacio generado por el autovalor 3 tiene dimensión 1. Necesitamos un vector propio generalizado $\eta \neq 0$ tal que $(A - 3I)\eta = v$, de forma que $\langle v, \eta \rangle = \mathbb{R}^2$.

$$(A - 3I)\eta = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1 - \eta_2 = 1 \\ \eta_1 - \eta_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \eta_1 = \eta_2 + 1$$

Tomamos $\eta_2 = 0$, $\eta_1 = 1$, luego $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

luego, la solución del problema homogéneo viene dada por:

$$Y_h(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= e^{3t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + C_2 \\ C_1 + C_2 t \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \Psi(t) \vec{C},$$

donde $\Psi(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{3t}(1+t) \\ e^{3t} & e^{3t}t \end{pmatrix}$,
y $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(20) Paso 2) Variación de parámetros

Buscamos una solución particular del problema no homogéneo en la forma $Y_p(t) = \Psi(t) U(t)$, con $U(t)$ una función no constante a determinar.

$$\cancel{A\Psi(t)U(t)} + G(t) = \cancel{Y_p'(t)} = \Psi'(t)U(t) + \Psi(t)U'(t) \\ = \cancel{A\Psi(t)U(t)} + \Psi(t)U'(t)$$

O sea, $\Psi(t)U'(t) = G(t)$, de donde, vía integral indefinida,

$$U(t) = \int \Psi^{-1}(t)G(t) dt \quad \leadsto \text{Desarrollar el método 1.0}$$

Notamos que $\det \Psi(t) = (e^{3t})^2 \{t - 1 - t\} = -e^{6t}$, luego

$$\bullet \Psi^{-1}(t) = \frac{e^{3t}}{-e^{6t}} \begin{pmatrix} t & -1-t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e^{-3t} \begin{pmatrix} -t & 1+t \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \Psi^{-1}(t)G(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -t & 1+t \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} t+1+t \\ -1-1 \end{pmatrix} \\ = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+2t \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \int \Psi^{-1}(t)G(t) dt = \begin{pmatrix} \int e^{-2t}(1+2t) dt \\ -2 \int e^{-2t} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2t}}{2}(1+2t) - \frac{e^{-2t}}{2} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow U(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1-2t-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↓

Aquí usamos Integración por partes: $\int u dv = uv - \int v du$
 con $\begin{cases} dv = e^{-2t} dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-2t}}{2} \\ u = 1+t \end{cases}$ y $\int v du = \int \frac{e^{-2t}}{2} 2 dt = \frac{e^{-2t}}{2}$

$$\Rightarrow Y_p(t) = Y(t)U(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} -1-t \\ 1 \end{pmatrix} \\ = e^t \begin{pmatrix} -1-t+1+t \\ -1-t+t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1,0) Paso 3) Solución general

Por lo tanto, la solución general viene dada por:

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$$

o sea,

$$Y(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R} \\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(1,0) Paso 4) Condición inicial

Finalmente, la única solución tal que $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, o sea,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 1 \end{cases}$$

es dada por

$$Y(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$