Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2024-1, Coordinado.
Miércoles 19 de Junio

PAUTA CONTROL 3

P1. *a*) (2 pt.) Encontrar f continua y de orden exponencial, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \frac{3s-2}{s^2+4s+20}.$$

Solución

Notemos que $s^2 + 4s + 20 = (s+2)^2 + 4^2$ y $3s - 2 = 3(s+2) - 2 \cdot 4$, luego

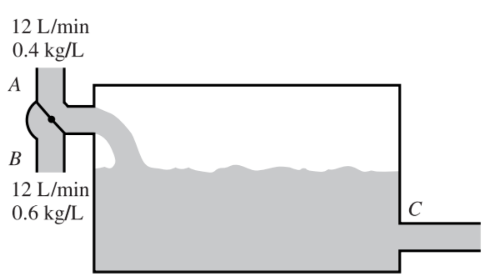
$$\frac{3s-2}{s^2+4s+20} = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+4^2} - 2 \cdot \frac{4}{(s+2)^2+4^2} \leftarrow [0{,}7 \text{ pts}]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] = 3\mathcal{L}[e^{-2x}\cos(4x)] - 2\mathcal{L}[e^{-2x}\operatorname{sen}(4x)]) \leftarrow [0{,}8 \text{ pts}]$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-2x}\Big(3\cos(4x) - 2\operatorname{sen}(4x)\Big) \leftarrow [0{,}5 \text{ pts}] \checkmark,$$

la cual es una función continua y de orden exponencial.

b) Un tanque contiene 500 l de una solución salina con una concentración inicial de sal de 0,2 kg/l. Durante los primeros 10 min se abre la válvula A añadiendo 12 l/min de una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/l. Después de 10 minutos, se cierra la válvula A y se abre la válvula B, la cual agrega solución salina con concentración de 0.6 kg/l a una tasa de 12 l/min. La válvula de salida C elimina la solución del tanque a una tasa de 12 l/min, manteniendo siempre el volumen constante.



1) (1,5 pt) Si $x(t)$ es la cantidad de sal en el tanque (en kg), pruebe que satisface una ecuación del tipo

$$x'(t) = -cx(t) + f(t),\ t \in [0, \infty);\ x(0) = 500 \cdot 0,2.$$

Determine c y $f(t)$.
Ind: Al plantear la ecuación, preocúpese que las unidades físicas sean coherentes entre los distintos términos.

Solución

$x(t)$ cantidad de sal en kg. Inicialmente hay $500l \cdot 0,2$ kg/l, por lo tanto $x(0) = 500 \cdot 0,2$. (No tiene puntaje)

$$\frac{dx}{dt} = \text{tasa a la que entra sal} - \text{tasa a la que sale sal}$$

La tasa a la que sale sal del tanque es: 12 l/min $\cdot \frac{x(t)}{500}$kg/l $\leftarrow$ [0,6 pts]. Por otra parte

$$\text{tasa a la que entra sal} = \begin{cases} 12\text{l/min} \cdot 0,4\text{kg/l} & 0 \leq t \leq 10 \\ 12\text{l/min} \cdot 0,6\text{kg/l} & t > 10 \end{cases}$$

[0,6 pts] por esta expresión, también es correcto usar como intervalos $0 \leq t < 10$ y $t \geq 10$. Por lo tanto:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{12}{500}x + f(t), \text{para } t \geq 0,$$

$$f(t) = \begin{cases} 4,8\text{kg/l} & 0 \leq t \leq 10 \\ 7,2\text{l/min} \cdot 0,6\text{kg/l} & t > 10 \end{cases}$$

[0,3 pts] por escribir la ecuación con la función f explícita. ✓.

2) (1 pt) Demuestre que $\mathcal{L}[x(t)]$ satisface

$$\left(s + \frac{12}{500}\right)\mathcal{L}[x(t)] = 100 + \frac{4,8}{s} + \frac{2,4}{s}e^{-10s}$$

para $s > 0$

Solución

Tenemos que

$$\mathcal{L}(\frac{dx}{dt}) = \mathcal{L}(-\frac{12}{500}x) + \mathcal{L}(f(t))$$

Usando la propiedad de la transformada de la derivada y la condición inicial $x(0) = 500 \cdot 0,2 = 100$ obtenemos:

$$s\mathcal{L}(x) - 100 = -\frac{12}{500}\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(f(t))$$

[0,3 pts] por esta expresión. El cálculo de $\mathcal{L}(f(t))$ se puede hacer de forma directa o con funciones de Heaviside. En cualquier caso el cálculo tiene un puntaje de [0,6 pts]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{10} 4,8e^{-st}dt + \int_{10}^{\infty} 7,2e^{-st}dt \\
&= 4,8\tfrac{e^{-st}}{-s}|_0^{10} + 7,2\tfrac{e^{-st}}{-s}|_{10}^{\infty} \\
&= 4,8\left(\tfrac{1}{s} - \tfrac{e^{-10s}}{s}\right) + 7,2\tfrac{e^{-10s}}{s} \\
&= \tfrac{4,8}{s} + 2,4\tfrac{e^{-10s}}{s}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, arreglando los términos se tiene la fórmula $\leftarrow$ [0,1 pts]

$$\left(s + \frac{12}{500}\right)\mathcal{L}(x) = 100 + \frac{4,8}{s} + \frac{2,4}{s}e^{-10s} \checkmark.$$

3) (1,5 pt) Determine la función $x(t)$.

Solución

Para esto despejamos $\mathcal{L}(x)$ obteniendo:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{100}{s+\frac{12}{500}} + \frac{4,8}{s\left(s+\frac{12}{500}\right)} + \frac{2,4}{s\left(s+\frac{12}{500}\right)}e^{-10s}$$

Para obtener estas transformadas partimos por descomponer en fracciones parciales

$$\frac{1}{s\left(s+\frac{12}{500}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{12}{500}}$$

Así $A\left(s+\frac{12}{500}\right) + Bs = 1$, por lo tanto $A = -B$ y $A\frac{12}{500} = 1$. De acá obtenemos $A = 500/12 = 125/3$, $B = -125/3$ $\leftarrow$ [0,3 pts]. Por lo tanto

$$\mathcal{L}(x) = \frac{100}{s+\frac{12}{500}} + 4,8\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{12}{500}}\right) + 2,4e^{-10s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{12}{500}}\right) \leftarrow \text{[0,2 pts]}.$$

Por otra parte

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{100}{s+\frac{12}{500}}\right) = 100e^{-\frac{12}{500}t} \leftarrow \text{[0,2 pts]}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(4,8\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{12}{500}}\right) = 4,8\left(A + Be^{-\frac{12}{500}t}\right) \quad \leftarrow \text{[0,3 pts]}$$

y finalmente usando lo anterior y la fórmula de la traslación, obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(2,4e^{-10s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{12}{500}}\right)\right) = 2,4H(t-10)\left(A + Be^{-\frac{12}{500}(t-10)}\right)$$

$\leftarrow$ [0,4 pts]. Finalmente, sumando los valores y reemplazando A y B (no es obligatorio) obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= 100e^{-\frac{12}{500}t} + 4,8\left(\frac{125}{3} - \frac{125}{3}e^{-\frac{12}{500}t}\right) \\ &\quad + 2,4H(t-10)\left(\frac{125}{3} - \frac{125}{3}e^{-\frac{12}{500}(t-10)}\right) \leftarrow \text{[0,1 pt]} \end{aligned}$$

P2. Considere $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto f(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \le x < 6 \\ 3 & x \ge 6 \end{cases}$

a) (2,5 pts.) Calcular $\mathcal{L}[f(x)](s)$.

Solución

Primero se verifica que $f(x) = \frac{x}{2}\big(H_0(x) - H_6(x)\big) + 3H_6(x) \leftarrow$ [1 pto], ahora calculemos su transformada

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\Big[x\big(H_0(x) - H_6(x)\big)\Big] + 3\cdot\frac{e^{-6s}}{s} \leftarrow \text{[0,5 pts]}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}\Big(\mathcal{L}[(H_0 - H_6)(x)]\Big) + 3\cdot\frac{e^{-6s}}{s} \leftarrow \text{[0,2 pts]}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{ds}\Big(\frac{1 - e^{-6s}}{s}\Big) + 3\cdot\frac{e^{-6s}}{s} \leftarrow \text{[0,3 pts]}\\
&= \boxed{\frac{1}{2s^2} - e^{-6s}\frac{1}{2s^2}} \leftarrow \text{[0,5 pts]} \checkmark.
\end{aligned}$$

Comentarios para corrección

- Es válido que la escritura de f en términos de funciones Heaviside se base en argumentos gráficos o analíticos, ambos de ser correctos tienen el puntaje respectivo (lo mismo para la siguiente parte).

$b)$ (3,5 pts.) Usando transformada de Laplace, resolver el problema

$$\begin{aligned}
&y'' + y = f(x)\\
&y(0) = 0,\ y'(0) = 1.
\end{aligned}$$

Solución

Aplicamos transformada de Laplace a la EDO usando la parte anterior para la transformada del lado derecho f y las condiciones iniciales del problema

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = \frac{1}{2s^2} - e^{-6s}\frac{1}{2s^2} \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}[y] - s\cancelto{0}{y(0^+)} - \cancelto{1}{y'(0^+)} + \mathcal{L}[y] = \frac{1}{2s^2} - e^{-6s}\frac{1}{2s^2} \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2s^2(s^2+1)} - e^{-6s}\frac{1}{2s^2(s^2+1)} \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

$$\text{notamos que } \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[\text{sen}(x)] = \mathcal{L}[x - \text{sen}(x)] \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\text{sen}(x)] + \mathcal{L}\left[\frac{x - \text{sen}(x)}{2}\right] - \mathcal{L}\left[\frac{H_6(x)\big(x - 6 - \text{sen}(x-6)\big)}{2}\right] \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\Big[x + \text{sen}(x) - H_6(x)\cdot\big(x - 6 - \text{sen}(x-6)\big)\Big] \leftarrow \text{[0,5 pts]} \checkmark.$$

Comentarios para corrección

- En el desarrollo de esta parte en vez de descomponer el término $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$, se puede ver que $\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \mathcal{L}[x] \cdot \mathcal{L}[\operatorname{sen}(x)] = \mathcal{L}[x * \operatorname{sen}(x)]$ gracias al Teorema de convolución, calculando $\int_0^x (x-u)\operatorname{sen}(u)du = x - \operatorname{sen}(x)$ se obtiene lo mismo de arriba, por ende un desarrollo con esta argumento tiene el mismo puntaje de estar correcto.

P3. *a*) Considere la siguiente ecuación que modela un sistema masa resorte con un amortiguador, al que después de $\pi/2$ segundos es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema queda descrito mediante el problema de valor inicial

$$x'' + 2x' + 10x = c\delta_{\frac{\pi}{2}},\ t > 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$$

1) (2 pt) Determine la solución en términos del parámetro c.

Solución

Aplicando transformada de Laplace se tiene

$$\mathcal{L}(x'') + 2\mathcal{L}(x') + 10\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(c\delta_{\frac{\pi}{2}}) = ce^{-s\frac{\pi}{2}} \leftarrow \text{[0,2 pts]}$$
$$s^2\mathcal{L}(x) - s\cdot 1 - (-1) + 2s\mathcal{L}(x) - 2\cdot 1 + 10\mathcal{L}(x) = ce^{-s\frac{\pi}{2}} \leftarrow \text{[0,3 pts]}$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(x) = \frac{s+1}{s^2+2s+10} + \frac{c}{s^2+2s+10}e^{-s\frac{\pi}{2}} \leftarrow \text{[0,2 pts]}$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(x) = \frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{c}{(s+1)^2+9}e^{-s\frac{\pi}{2}} \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[e^{-t}\cos(3t)] + c\mathcal{L}\left[\frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen}(3t)\right]e^{-s\frac{\pi}{2}} \leftarrow \text{[0,3 pts]}$$
$$\Rightarrow x(t) = e^{-t}\cos(3t) + c\frac{1}{3}e^{-(t-\pi/2)}\operatorname{sen}(3(t-\pi/2))\cdot H(t-\pi/2) \leftarrow \text{[0,5 pts]}.$$

2) (1 pt) ¿Qué valor debe tener c para que la masa quede detenida para $t > \frac{\pi}{2}$?.

Solución

Notando que $\frac{c}{3}\operatorname{sen}(3(t-\pi/2)) = \frac{c}{3}\cos(3t) \leftarrow$ [0,5 pts], luego para $t > \pi/2$ la suma es 0 si

$$e^{-t}\cos(3t) + e^{-(t-\pi/2)}\frac{c}{3}\cos(3t)\cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{c = -3e^{\frac{-\pi}{2}}} \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

Comentarios para corrección

Otra manera de hacer esta parte es verificar que en $t = \pi/2^-$ la solución es 0 por lo que se necesita que la derivada de la solución para $t = \pi/2^+$ sea 0, se verifica que en $t = \pi/2^-$ implica $x(t) = e^{-\pi/2}\cos(3\pi/2) = 0$ $\leftarrow$ [0,5 pts] y en $t = \pi/2^-$ la derivada es

$$-e^{-\pi/2}\cos(3\pi/2) - 3e^{-\pi/2}\operatorname{sen}(3\pi/2) = 3e^{-\pi/2} \leftarrow \text{[0,3 pts]},$$

como al agregar $c\delta_{\pi/2}$ al lado derecho se suma c a la derivada en $\pi/2$ (pues $c\delta_{\pi/2}$ cambia la velocidad instantáneamente en $\pi/2$ en c), entonces necesitamos que $3e^{-\pi/2} + c = 0$ es decir $\boxed{c = -3e^{\frac{-\pi}{2}}}$ $\leftarrow$ [0,2 pts] ✓.

b) (3 pt) Use transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= y + \operatorname{sen}\, t,\ \ x(0) = 2 \\ y' &= x + 2\cos t,\ \ y(0) = 0. \end{aligned}$$

Solución

Aplicamos transformada al sistema

$$\mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(\text{sen}(t)) = \mathcal{L}(y) + \frac{1}{s^2+1} \leftarrow \text{[0,2 pts]}$$
$$\mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}(\cos(t)) = \mathcal{L}(x) + 2\cdot\frac{s}{s^2+1} \leftarrow \text{[0,2 pts]}.$$

Usando las condiciones iniciales se llega a

$$s\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) = 2 + \frac{1}{s^2+1} \leftarrow \text{[0,1 pt]}.$$
$$s\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x) = 2\frac{s}{s^2+1} \leftarrow \text{[0,1 pt]}.$$

Luego

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{L}(x) \\ \mathcal{L}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\frac{1}{s^2+1} \\ 2\frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \leftarrow \text{[0,2 pts]}.$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{L}(x) \\ \mathcal{L}(y) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2-1}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2+\frac{1}{s^2+1} \\ 2\frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \leftarrow \text{[0,2 pts]}.$$

Calculando para cada transformada se llega a

$$\mathcal{L}(x) = \frac{2s}{(s-1)(s+1)} + \frac{3s}{(s^2+1)(s-1)(s+1)} \leftarrow \text{[0,3 pts]}$$
$$\mathcal{L}(y) = \frac{4}{(s-1)(s+1)} - \frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)} \leftarrow \text{[0,5 pts]}.$$

Ahora (fracciones parciales por ejemplo) se tiene que

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} \leftarrow \text{[0,1 pt]}$$
$$\frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)} \leftarrow \text{[0,1 pt]}$$
$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)(s+1)} = -\frac{1}{2(s^2+1)} + \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)} \leftarrow \text{[0,1 pt]}$$
$$\frac{s}{(s^2+1)(s-1)(s+1)} = -\frac{s}{2(s^2+1)} + \frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{4(s+1)} \leftarrow \text{[0,3 pts]}.$$

Finalmente gracias a esto se reconocen transformadas conocidas obteniendo

$$x(t) = \frac{7}{4}e^t + \frac{7}{4}e^{-t} - \frac{3}{2}\cos(t) \leftarrow \text{[0,3 pts]}.$$
$$y(t) = \frac{7}{4}e^t - \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\text{sen}(t) \leftarrow \text{[0,3 pts]}.$$