



### PAUTA CONTROL 3

- P1.** a) **(2 pts)** Sea  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , una matriz a coeficientes constantes e invertible. Demuestre que, dado  $t_0 \geq 0$ , se tiene la siguiente fórmula para la integral de la matriz exponencial,

$$\forall t \in [t_0, +\infty), \quad \int_{t_0}^t e^{uA} du = A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0A})$$

**Indicación:** Considere la función a valores matriciales

$$W(t) = \int_{t_0}^t e^{uA} du - A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0A})$$

**Solución.**

Demostrar la igualdad

$$\forall t \in [t_0, +\infty), \quad \int_{t_0}^t e^{\tau A} d\tau = A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0A})$$

es equivalente a demostrar que la función dada en la indicación es idénticamente nula para todo  $t \geq t_0$ . Luego, si se calcula la derivada de  $W$ , se tiene:

$$\frac{dW}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_{t_0}^t e^{\tau A} d\tau \right) - \frac{d}{dt} (A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0A})) \quad (0.5 \text{ pts})$$

$$\text{pero, } \frac{de^{tA}}{dt}(t) = Ae^{tA} \quad (0.5 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt}(t) = e^{tA} \frac{dt}{dt} - e^{t_0A} \frac{dt_0}{dt} - \underbrace{A^{-1}A}_I e^t$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt}(t) = e^{tA} - Ie^{tA} = 0$$

$$\Rightarrow W(t) = C \quad \text{es decir, } W \text{ es una matriz constante de } n \times n \quad \forall t \geq t_0 \quad (0.5 \text{ pts})$$

En particular para  $t = t_0$  se tiene que

$$W(t = t_0) = \int_{t_0}^{t_0} e^{\tau A} d\tau - A^{-1}(e^{t_0A} - e^{t_0A}) \equiv 0 \equiv C \quad (0.5 \text{ pts})$$

por lo que la matriz  $[C] \equiv [0]$  (ie, es la matriz nula), con lo que se demuestra la igualdad



- b) **(4 pts)** Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente por el método de variación de parámetros.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

indicando claramente los siguientes puntos en su resolución:

**(i)** cual es el sistema homogéneo asociado, **(ii)** los valores y vectores propios de la matriz del sistema, **(iii)** cual es la matriz fundamental del sistema, **(iv)** si la matriz fundamental es canónica o no, **(v)** cual es la solución homogénea (sin evaluar las constantes), **(vi)** cual es la solución particular, y **(vii)** cual es la solución al problema de valor inicial planteado.

### Solución.

El sistema homogéneo asociado es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (0.2 \text{ pts})$$

Para resolver el sistema de ecuaciones de primer orden hay que encontrar primero la matriz fundamental  $M(t)$ , para ello es necesario encontrar los valores y vectores propios de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Valores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \quad (0.4 \text{ pts})$$

- Vectores propios:

para  $\lambda = i$ :

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -iz_1 + z_2 = 0 \\ \Rightarrow z_2 = iz_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (0.4 \text{ pts})$$

- Con lo anterior, se sabe que

$$e^{it\vec{v}} = (\cos(t) + i\operatorname{sen}(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

es una solución compleja del sistema homogéneo. De esta, se puede reconocer dos soluciones reales y l.i. del sistema (la parte real y la parte imaginaria de la solución compleja), con lo que se puede escribir la solución homogénea del sistema de ecuaciones como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_h = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (0.5 \text{ pts})$$

Luego, se puede identificar una matriz fundamental del sistema como:

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \quad (0.4 \text{ pts})$$

y es la matriz fundamental canónica, ya que

$$M(t=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.3 \text{ pts})$$

**Importante para la corrección:**

- 1) Aquí el/la estudiante puede haber colocado las soluciones del sistema en un orden diferente al ensamblar la matriz fundamental, por ejemplo

$$M(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix}$$

o incluso haber cambiado los signos de una o ambas columnas de  $M(t)$ . En esos casos se debe asignar el puntaje completo por encontrar la matriz fundamental, ya que el orden de las columnas y el valor de las constantes  $c_1$  y  $c_2$  son arbitrarios.

- 2) Si la/el estudiante responde como en el ítem anterior (o similar) y  $M(t=0)$  no es una matriz identidad, debe indicar que la matriz fundamental NO es canónica para que se le asigne el puntaje respectivo.
- 3) El/la estudiante puede haber identificado la matriz fundamental  $M(t)$  y expresar la solución homogénea como  $M(t)\vec{c}$ , en ese caso se debe asignar el puntaje completo en el ítem de identificar la solución homogénea.
- 4) En lo que sigue de la pauta, para encontrar la solución particular utilizando la fórmula de variación de parámetros vista en clases,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\xi) \vec{b}(\xi) d\xi$$

se debe notar que  $\Phi(t)$  debe ser la matriz fundamental canónica, por lo que el/la estudiante debe encontrar dicha matriz, por ejemplo calculando  $\Phi(t) = M(t)M^{-1}(t=0)$ , o darse cuenta que debe simplemente permutar las columnas de  $M(t)$  para que esta se convierta en la matriz fundamental canónica.

La solución particular se encuentra usando la fórmula de variación de parámetros:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\xi) \vec{b}(\xi) d\xi \quad (0.3 \text{ pts})$$

en donde  $\Phi(t)$  es la matriz fundamental canónica. (0.2 pts)

**Nota:** en los dos puntajes anteriores, el primero es por saber la fórmula de variación de parámetros y el segundo es por saber que se debe ocupar la matriz fundamental canónica en dicha fórmula.

En este caso  $\Phi(t) = M(t)$  es la matriz fundamental canónica del sistema. Notar además que las columnas de  $M(t)$  son ortonormales, luego  $\Phi^{-1}(\xi) = M^{-1}(\xi) = M^T(\xi)$  (i.e., la inversa de  $M(t)$  es igual a su traspuesta).

Luego, reemplazando, se obtiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\xi) & -\sin(\xi) \\ \sin(\xi) & \cos(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -2\sin^2(\xi) \\ 2\cos(\xi)\sin(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \int_0^t \sin^2(\xi) d\xi \\ \int_0^t 2\cos(\xi)\sin(\xi) d\xi \end{pmatrix}$$

Por un lado, sabiendo de memoria, integrando por partes u ocupando la identidad  $\sin^2(\xi) + \cos^2(\xi) = 1$ , se tiene que

$$-2 \int_0^t \sin^2(\xi) d\xi = \cos(t)\sin(t) - t$$

y con un cambio de variable (u ocupando la fórmula del seno del ángulo doble)

$$\int_0^t 2\cos(\xi)\sin(\xi) d\xi = \sin^2(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2t)]$$

en la última integral, ambos resultados pueden servir. Aquí, de manera arbitraria, ocupamos el primero. Luego reemplazando, queda

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) - t \\ \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} \cos^2(t)\sin(t) + \sin^3(t) - t\cos(t) \\ -\cos(t)\sin^2(t) + \cos(t)\sin^2(t) + t\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} [1 - \sin^2(t)]\sin(t) + \sin^3(t) - t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$$

Luego, simplificando se obtiene la solución particular:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} \sin(t) - t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \quad (0.8 \text{ pts})$$

**Importante para la corrección:** Distribuir los 0.8 pts a lo largo del desarrollo de la fórmula de variación de parámetros. Además, en la corrección tomar en cuenta que el/la estudiante puede haber escogido formas trigonométricas equivalentes a estas al desarrollar las integrales en la fórmula de variación de parámetros. Por lo que la forma de la solución particular puede quedar con una expresión diferente, pero equivalente (que se puede transformar en función de identidades trigonométricas).

Luego se tiene que la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}}_{\text{solución homogénea}} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}_{\text{solución particular}} + \begin{pmatrix} \sin(t) - t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \quad (0.3 \text{ pts})$$

y evaluando en las condiciones iniciales,

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se deduce que para las condiciones iniciales nulas, se tiene  $c_1 = c_2 = 0$ . Luego, la solución del sistema con estas condiciones iniciales es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) - t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \quad (0.2 \text{ pts})$$

■

**P2.** Considere el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

donde  $A : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  es una función a valores matriciales, continua, no trivial, y de período  $T > 0$ , es decir  $A(t+T) = A(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Suponga además que  $A(\cdot)$  es una función impar, es decir para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $A(-t) = -A(t)$ . Sea  $W(t)$  la matriz fundamental de este sistema que satisface  $W(0) = I_{n \times n}$  (la matriz identidad).

Pruebe que:

- a) **(2 pts)**  $W(t+T) = W(t)W(T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- b) **(2 pts)**  $W(-t) = W(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- c) **(1 pt)**  $W(T)^2 = I_{n \times n}$ .
- d) **(1 pt)** Todas las soluciones  $\vec{x}(t)$  del sistema son periódicas de período  $2T$ .

**Solución.**

- a) *p.d.q.*  $W(t+T) = W(t)W(T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Sea,

$$\varphi(t) = W(t+T) - W(t)W(T)$$

si tomamos la derivada a ambos lados,

$$\varphi'(t) = W'(t+T) - W'(t)W(T)$$

y recordamos que  $W(t)$  es la matriz fundamental del sistema. Luego satisface  $W'(t) = A(t)W(t)$ . Reemplazando,

$$\varphi'(t) = A(t+T)W(t+T) - A(t)W(t)W(T)$$

$$\begin{aligned}
&= A(t)W(t+T) - A(t)W(t)W(T) \quad \leftarrow \text{ya que } A(t+T) = A(t) \\
&= A(t) \{W(t+T) - W(t)W(T)\} \\
&= A(t)\varphi(t)
\end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi(t=0) &= W(0+T) - \underbrace{W(0)}_{I_{n \times n}} W(T) \\
&= 0_{n \times n}
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que  $\varphi(t)$  es solución del problema a valor inicial:

$$\begin{cases} \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \\ \varphi(0) = 0_{n \times n} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  por el teorema de existencia y unicidad, la única solución posible es

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = 0_{n \times n} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow W(t+T) = W(t)W(T) \quad \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

■

(2.0 pts)

b) *p.d.q.*  $W(-t) = W(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Solución.**

Sea,

$$\varphi(t) = W(-t) - W(t)$$

si tomamos la derivada a ambos lados,

$$\varphi'(t) = -W'(-t) - W'(t)$$

y recordamos que  $W(t)$  es la matriz fundamental del sistema. Luego satisface  $W'(t) = A(t)W(t)$ . Reemplazando,

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -A(-t)W(-t) - A(t)W(t) \\
&= A(t)W(-t) - A(t)W(t) \quad \leftarrow \text{ya que } A(-t) = -A(t) \\
&= A(t) \{W(-t) - W(t)\} \\
&= A(t)\varphi(t)
\end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi(t=0) &= W(0) - W(0) \\
&= 0_{n \times n}
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que  $\varphi(t)$  es solución del problema a valor inicial:

$$\begin{cases} \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \\ \varphi(0) = 0_{n \times n} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  por el teorema de existencia y unicidad, la única solución posible es

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= 0_{n \times n} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow W(-t) &= W(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$



(2.0 pts)

c) *p.d.q.*  $W(T)^2 = I_{n \times n}$ .

**Solución.**

Se procederá a usar la propiedad a)  $W(t+T) = W(t)W(T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

En particular para  $t = -T$ , se tiene

$$\begin{aligned}W(-T+T) &= W(0) = I_{n \times n} = W(-T)W(T) \\ &= W(T)W(T) \quad \leftarrow \text{por parte b) } W(-t) = W(t)\end{aligned}$$

Luego, es directo que

$$W(T)^2 = I_{n \times n}$$



(1.0 pt)

d) *p.d.q.* Todas las soluciones  $\vec{x}(t)$  del sistema son periódicas de período  $2T$ .

**Solución.**

Dado que  $W(t)$  es la matriz fundamental del sistema, las soluciones del sistema son de la forma

$$\vec{x}(t) = W(t)\vec{c}$$

donde  $\vec{c}$  es un vector de constantes.

Luego, demostrar que todas las soluciones del sistema son  $2T$  periódicas, es equivalente a demostrar que la matriz fundamental  $W(t)$  es periódica, con período  $2T$ .

Si usamos la propiedad a) para  $t = t^* + T$  queda

$$\begin{aligned}W(t^* + T + T) &= W(t^* + T)W(T) \\ &= W(t^*)W(T)W(T) \quad \leftarrow \text{usando propiedad a) nuevamente} \\ &= W(t^*)W^2(T) \\ &= W(t^*)I_{n \times n} \quad \leftarrow \text{usando propiedad c)} \\ &= W(t^*)\end{aligned}$$

Luego, como  $t^*$  es cualquiera, se tiene que  $W(t^* + 2T) = W(t^*)$ , es decir, la matriz fundamental del sistema es  $2T$  periódica.



(1.0 pts)

### P3. Transformada de Laplace

a) (4.0 pts) Use transformada de Laplace para resolver el problema con condición inicial

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = f(t) \\ y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{donde} \quad f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

**Indicación:** si un polinomio de grado 2 admite raíces complejas  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , este se puede factorizar como  $(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$ .

#### Solución.

Se tiene el problema  $y'' + 4y' + 4y = f(t)$ , con condiciones iniciales  $y(0) = y'(0) = 0$ . El lado derecho de la EDO se puede escribir como

$$f(t) = [1 - u(t - 2)]t \quad (0.2 \text{ pts})$$

donde  $u(t)$  es la función escalón unitario. Luego la EDO queda escrita como:

$$y'' + 4y' + 4y = [1 - u(t - 2)]t$$

Denotemos por  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$  y  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  a la transformada de Laplace de las funciones  $y(t)$  y  $f(t)$ , respectivamente.

Tomando transformada de Laplace a ambos lados de la EDO y aplicando la fórmula de la transformada de una derivada de orden n, con las condiciones iniciales dadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) &= F(s) \\ Y(s)(s^2 + 4s + 4) &= F(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s + 2)^2} F(s) \quad (0.4 \text{ pts})$$

Necesitamos calcular  $F(s) = \mathcal{L}\{[1 - u(t - 2)]t\}(s)$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{[1 - u(t - 2)]t\}(s) = \mathcal{L}\{t\}(s) + \mathcal{L}\{-tu(t - 2)\}(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}\{-tu(t - 2)\}(s) \end{aligned}$$

aquí una opción es usar la fórmula de la derivada de la transformada de Laplace. Alternativamente, sumamos cero:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}\{-tu(t - 2)\}(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}\{-(t - 2 + 2)u(t - 2)\}(s) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}\{-(t-2)u(t-2) - 2u(t-2)\}(s) \\
&= \frac{1}{s^2} - \underbrace{\mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\}(s)}_{(*)} - 2 \underbrace{\mathcal{L}\{u(t-2)\}(s)}_{(**)}
\end{aligned}$$

Usando el segundo teorema de traslación:

$$\begin{aligned}
(*) &= \mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\}(s) = e^{-2s} \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2} \\
(**) &= \mathcal{L}\{1u(t-2)\}(s) = e^{-2s} \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s}
\end{aligned}$$

Luego,

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - 2 \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1 - e^{-2s}(1 + 2s)}{s^2} \quad (0.9 \text{ pts})$$

Luego, la transformada de Laplace de la función incógnita queda:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{(s+2)^2} F(s) = \frac{1 - e^{-2s}(1 + 2s)}{s^2(s+2)^2} \\
&= \underbrace{\frac{1}{s^2(s+2)^2}}_{(\bullet)} - e^{-2s} \underbrace{\frac{1 + 2s}{s^2(s+2)^2}}_{(\bullet\bullet)}
\end{aligned}$$

para poder continuar, es necesario usar fracciones parciales,

$$\begin{aligned}
(\bullet) = \frac{1}{s^2(s+2)^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} \quad (0.3 \text{ pts}) \\
&= \frac{As(s+2)^2 + B(s+2)^2 + C(s+2)s^2 + Ds^2}{s^2(s+2)^2} \\
&= \frac{A(s^3 + 4s^2 + 4s) + B(s^2 + 4s + 4) + C(s^3 + 2s^2) + Ds^2}{s^2(s+2)^2}
\end{aligned}$$

luego, aplicando independencia lineal de  $s^0$ ,  $s^1$ ,  $s^2$  y  $s^3$ , se tiene:

$$\left. \begin{aligned} s^3 &\Rightarrow A + C = 0 \\ s^2 &\Rightarrow 4A + B + 2C + D = 0 \\ s^1 &\Rightarrow 4A + 4B = 0 \\ s^0 &\Rightarrow 4B = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/4 \\ A = -B = -1/4 \\ C = -A = 1/4 \\ D = -(4A + B + 2C) = 1/4 \end{cases} \quad (0.2 \text{ pts})$$

reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\bullet) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \mathcal{L} \{ -1 + t + e^{-2t} + te^{-2t} \} (s) \\
&= \frac{1}{4} \mathcal{L} \{ t - 1 + e^{-2t}(t + 1) \} (s) \quad (0.6 \text{ pts})
\end{aligned}$$

Para  $(\bullet\bullet) = \frac{1+2s}{s^2(s+2)^2}$  las ecuaciones de fracciones parciales son idénticas, salvo que cambia el lado derecho al aplicar la independencia lineal de  $s^0$ ,  $s^1$ ,  $s^2$  y  $s^3$ , teniéndose:

$$\left. \begin{aligned} s^3 &\Rightarrow A + C = 0 \\ s^2 &\Rightarrow 4A + B + 2C + D = 0 \\ s^1 &\Rightarrow 4A + 4B = 2 \\ s^0 &\Rightarrow 4B = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/4 \\ A = 1/4 \\ C = -A = -1/4 \\ D = -(4A + B + 2C) = -3/4 \end{cases} \quad (0.2 \text{ pts})$$

reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\bullet\bullet) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+2} - \frac{3}{(s+2)^2} \right] \\
&= \frac{1}{4} \mathcal{L} \{ 1 + t - e^{-2t} - 3te^{-2t} \} (s) \\
&= \frac{1}{4} \mathcal{L} \{ 1 + t - e^{-2t}(1 + 3t) \} (s) \quad (0.6 \text{ pts})
\end{aligned}$$

Agrupando, obtenemos

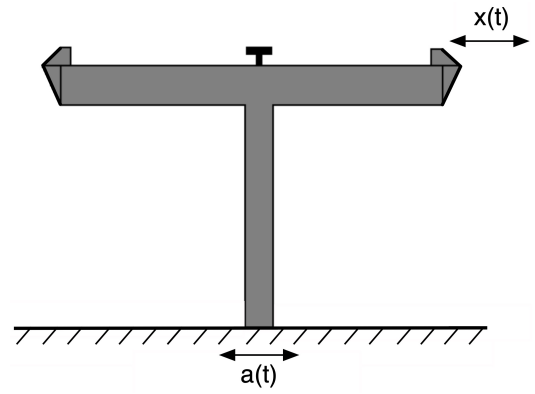
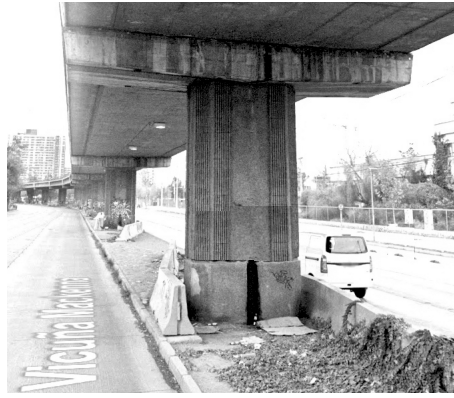
$$\begin{aligned}
Y(s) &= (\bullet) - e^{-2s}(\bullet\bullet) \\
\Rightarrow y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ (\bullet) - e^{-2s}(\bullet\bullet) \} (t) \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \mathcal{L} \{ t - 1 + e^{-2t}(t + 1) \} (s) - e^{-2s} \frac{1}{4} \mathcal{L} \{ 1 + t - e^{-2t}(1 + 3t) \} (s) \right\} (t) \\
&= \frac{1}{4} \left[ \mathcal{L}^{-1} \{ \mathcal{L} \{ t - 1 + e^{-2t}(t + 1) \} (s) \} (t) - \mathcal{L}^{-1} \{ e^{-2s} \mathcal{L} \{ 1 + t - e^{-2t}(1 + 3t) \} (s) \} (t) \right]
\end{aligned}$$

Luego aplicando la anti-transformada y usando el segundo teorema de traslación, se tiene:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{4} [t - 1 + e^{-2t}(t + 1)] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \{ -e^{-2s} \mathcal{L} \{ 1 + t - e^{-2t}(1 + 3t) \} (s) \} (t) \\
&= \frac{1}{4} [t - 1 + e^{-2t}(t + 1)] - \frac{1}{4} u(t - 2) [t - 1 - e^{-2(t-2)}(3t - 5)] \quad (0.6 \text{ pts})
\end{aligned}$$

■

- b) **(2.0 pts)** En la figura siguiente, se muestra una foto de la estructura de hormigón armado del tramo elevado de la Línea 5 del Metro de Santiago (izquierda) y un esquema (derecha) de un modelo dinámico estructural – como un oscilador de un grado de libertad – de los pilares y vigas que afirman la losa por donde se deslizan los trenes.



Cuando la estructura es solicitada por un terremoto, el movimiento horizontal  $x(t)$  de la parte superior de ésta queda modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 2\beta w \frac{dx}{dt}(t) + w^2 x(t) = -a(t)$$

donde  $a(t)$  es la aceleración horizontal del suelo,  $\beta > 0$  es la razón de amortiguamiento crítico del material de la estructura y  $w > 0$  es la frecuencia natural de oscilación de la estructura, respectivamente.

Se pide demostrar – usando transformada de Laplace – que cuando  $x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ , (es decir, la estructura esta en reposo y en su punto de equilibrio en la condición inicial) y considerando  $\beta \ll 1$  (caso para hormigón armado), el movimiento horizontal de la estructura queda determinado por la Integral de Duhamel, como:

$$x(t) = -\frac{1}{w_d} \int_0^t a(\xi) e^{-\beta w(t-\xi)} \text{sen}(w_d(t-\xi)) d\xi \quad \forall t > 0$$

donde  $w_d = w\sqrt{1-\beta^2}$ , es la frecuencia amortiguada de la estructura.

**Indicación:** si un polinomio de grado 2 admite raíces complejas  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , este se puede factorizar como  $(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$

### Solución.

Se tiene la EDO

$$x''(t) + 2\beta w x'(t) + w^2 x(t) = -a(t)$$

con condiciones iniciales  $x(0) = x'(0) = 0$ . Denotemos por  $X(s)$  y  $A(s)$  a las transformadas de Laplace de  $x(t)$  y  $a(t)$ , respectivamente. Luego, si se aplica la transformada de Laplace a ambos lados de la EDO, utilizando la fórmula de la transformada de derivadas y las condiciones iniciales, se tiene:

$$\begin{aligned} s^2 X(s) + 2\beta w s X(s) + w^2 X(s) &= -A(s) \\ X(s) [s^2 + 2\beta w s + w^2] &= -A(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X(s) = -A(s) \underbrace{\frac{1}{s^2 + 2\beta ws + w^2}}_{(\square)} \quad (0.4 \text{ pts})$$

Para poder proceder, es necesario factorizar el denominador en  $(\square)$ , es decir, encontrar las raíces de  $s^2 + 2\beta ws + w^2$ . Veamos,

$$\begin{aligned} s^2 + 2\beta ws + w^2 &= 0 \\ \Rightarrow s^* &= \frac{-2\beta w \pm \sqrt{4\beta^2 w^2 - 4w^2}}{2} \\ &= -\beta w \pm w\sqrt{\beta^2 - 1} \end{aligned}$$

luego, como  $0 < \beta \ll 1$ , las raíces son complejas conjugadas

$$\begin{aligned} s^* &= -\beta w \pm i \underbrace{w\sqrt{1 - \beta^2}}_{w_d} \\ &= -\beta w \pm iw_d \end{aligned}$$

Luego, usando la indicación, se puede escribir:

$$\begin{aligned} (\square) &= \frac{1}{(s + \beta w)^2 + w_d^2} \\ &= \frac{1}{w_d} \frac{w_d}{(s + \beta w)^2 + w_d^2} \end{aligned} \quad (0.2 \text{ pts})$$

luego, utilizando la transformada de la función seno y el primer teorema de traslación, se obtiene

$$(\square) = \frac{1}{w_d} \mathcal{L} \{ e^{-\beta wt} \text{sen}(w_d t) \} (s) \quad (0.6 \text{ pts})$$

Luego, se tiene:

$$X(s) = \frac{-1}{w_d} A(s) \mathcal{L} \{ e^{-\beta wt} \text{sen}(w_d t) \} (s)$$

y tomando anti transformada,

$$x(t) = \frac{-1}{w_d} \mathcal{L}^{-1} \{ A(s) \mathcal{L} \{ e^{-\beta wt} \text{sen}(w_d t) \} (s) \} (t)$$

Ahora se tiene la anti-transformada del producto de 2 transformadas de Laplace, luego usamos el teorema de convolución

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ f(t) * g(t) \} (s) &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\xi) g(t - \xi) d\xi \right\} (s) \\ &= \mathcal{L} \{ f(t) \} (s) \mathcal{L} \{ g(t) \} (s) \end{aligned} \quad (0.2 \text{ pts})$$

para obtener el resultado:

$$x(t) = -\frac{1}{w_d} \int_0^t a(\xi) e^{-\beta w(t-\xi)} \text{sen}(w_d(t-\xi)) d\xi \quad (0.6 \text{ pts})$$