UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2020
MA2601 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SECCIONES: 2,3,4,5,6 Y 7

Control 3-P1

1. (3 pts.) Resolver el sistema homogéneo con condición inicial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

.

Solución: Denotemos por $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $X_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El polinomio característico de A está dado por

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &=(3-\lambda)\left[(5-\lambda)(3-\lambda)-1\right] + \lambda - 2 + \lambda - 4 \\ &=(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) \\ &=(3-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-2). \end{aligned} \tag{1}$$

De esta forma, los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 6$. Al ser distintos se tiene que la matriz A es diagonalizable y la solución del sistema homogéneo planteado está dada por $e^{At}X_0$. Para obtener e^{At}, al disponer de los valores propios, lo adecuado en este caso es escribir $A = PDP^{-1}$. Para ello, debemos hallar los vectores propios asociados. Estos son

- Para $\lambda_1 = 2$ el vector propio asociado es $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Para $\lambda_2 = 3$ el vector propio asociado es $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Para $\lambda_3 = 6$ el vector propio asociado es $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Luego $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Ahora de la propiedad $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, se tiene que la matriz exponencial de A está dada por

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t}/2 + e^{3t}/3 + e^{6t}/6 & e^{3t}/3 - e^{6t}/3 & -e^{2t}/2 + e^{3t}/3 + e^{6t}/6 \\ e^{3t}/3 - e^{6t}/3 & e^{3t}/3 + 2e^{6t}/3 & e^{3t}/3 - e^{6t}/3 \\ -e^{2t}/2 + e^{3t}/3 + e^{6t}/6 & e^{3t}/3 - e^{6t}/3 & e^{2t}/2 + e^{3t}/3 + e^{6t}/6 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

y la solución de nuestro sistema es

$$e^{At}X_0 = \begin{bmatrix} e^{2t} + 5e^{3t}/3 + e^{6t}/3 \\ 5e^{3t}/3 - 2e^{6t}/3 \\ -e^{2t} + 5e^{3t}/3 + e^{6t}/3 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Alternativamente se puede llegar a la solución en términos de la matriz fundamental $\Phi(t)$, donde las columnas $\Phi(t)$ forman la base fundamental

$$\left\{ e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{4}$$

Con ello $\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{2t} & e^{3t} & e^{6t} \\ 0 & e^{3t} & -2e^{6t} \\ e^{2t} & e^{3t} & e^{6t} \end{bmatrix}$ y luego la solución general es $\Phi(t)\vec{c}$, donde

$$\begin{aligned} \vec{c} =& \Phi(0)^{-1}X_0 \\ =& \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

con lo cual se llega también a (3).

Puntaje:

- Polinomio característico (0,7 pts.) y valores propios (0,3 pts.).
- Por los vectores propios (1,2 pts.). (Distribuir uniforme por cada uno).
- Por calcular e^{At} o expresar la solución general mediante la matriz fundamental $\Phi(t)$ $(0,5$ pts.$)$.
- Por obtener (3) (0,3 pts.).

2. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. El objetivo de esta parte es calcular e^{At}. Para ello

   a) (1.5 pts.) Demostrar que $A^{2k} = I_2$, y $A^{2k+1} = A$ para todo k natural.
   Ind: Use inducción.

   Solución: Notemos que $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Luego para $k = 0, 1$ se verifica que $A^{2k} = I_2$. Supongamos ahora que para $k_0 \in \mathbb{N}$ se cumple que $A^{2k_0} = I_2$. Luego $A^{2(k_0+1)} = A^{2k_0}A^2 = A^2 = I_2$. Por lo tanto $A^{2k} = I_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

   Por otro lado, como $A^3 = A$, para $k = 0, 1$ se cumple que $A^{2k+1} = A$. Supongamos ahora que A^{2k+1} se verifica para $k_0 \in \mathbb{N}$. Entonces $A^{2(k_0+1)+1} = A^{2k_0+1}A^2 = AI_2 = A$. En conclusión $A^{2k+1} = A$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

   Puntaje:
   - Por probar $A^{2k} = I_2$ $(0,8$ pts.$)$.
   - Por probar $A^{2k+1} = A$ $(0,7$ pts.$)$.

   b) (1.5 pts.) Recordando que $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ y $\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, use la definición de e^{At} junto con la parte anterior para deducir que

$$e^{At} = \cosh(t)I_2 + \operatorname{senh}(t)A,$$

   donde I_2 es la matriz identidad de dimensión 2.
   Ind: $e^x = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ válido para x real.

   Solución: Primero determinamos las series de $\cosh(x)$ y $\operatorname{senh}(x)$, notando que

$$x^k + (-1)^k x^k = \begin{cases} 2x^k & \text{para } k \text{ par} \\ 0 & \text{para } k \text{ impar} \end{cases}, \tag{6}$$

   obtenemos

$$\begin{aligned} \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} \frac{x^k + (-1)^k x^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned} \tag{7}$$

Análogamente, como

$$x^k - (-1)^k x^k = \begin{cases} 2x^k & \text{para } k \text{ impar} \\ 0 & \text{para } k \text{ par} \end{cases}, \tag{8}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k\geq 0} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} \frac{x^k - (-1)^k x^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned} \tag{9}$$

Puntaje: Por los cálculos de las series anteriores

- Por (6). (0,1 pts.).
- Por (7). (0,1 pts.).
- Por (8). (0,1 pts.).
- Por (9). (0,1 pts.).

Solución (Continuación): Usando los ítems anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k\geq 0} \frac{A^k t^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} + \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} I_2 + \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A \\ &= \cosh(t) I_2 + \operatorname{senh}(t) A. \end{aligned} \tag{10}$$

Puntaje: Distribuir el puntaje como: Escribir e^{At} $(0,1$ pts.$)$, separar la serie respecto a la paridad del índice $(0,5$ pts.$)$, usar las partes anteriores para las potencias de A $(0,3$ pts.$)$ y concluir $(0,2$ pts.$)$.

Control 3-P2

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sea el sistema

$$t\vec{X}' = A\vec{X}, \qquad t > 0. \tag{11}$$

1. (2 pts.) Se define $t^A := e^{A\ln(t)}$. Demostrar que t^A es una matriz fundamental de (11), esto es, $t\frac{d}{dt}(t^A) = At^A$ y t^A es invertible para todo $t > 0$.

Solución: Ya que la serie t^A está bien definida y verifica las mismas propiedades que e^{At} podemos asegurar que la serie t^A converge uniformemente, esto nos permite derivar la serie término a término. De esta forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t^A) =& \frac{d}{dt}(e^{A\ln(t)})\\ =& \frac{d}{dt}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(\ln(t))^k}{k!}A^k\right)\\ =& \sum_{k\geq 0}\frac{d}{dt}\left(\frac{(\ln(t))^k}{k!}A^k\right)\\ =& \sum_{k\geq 0}\frac{1}{t}\frac{k(\ln(t))^{k-1}}{k!}A^k\\ =& \frac{A}{t}\sum_{k\geq 1}\frac{(\ln(t))^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}\\ =& \frac{A}{t}\sum_{k\geq 0}\frac{(\ln(t))^k}{k!}A^k\\ =& \frac{A}{t}e^{A\ln(t)}.\end{aligned} \tag{12}$$

Así $t(t^A)' = At^A$. Por otro lado, como $I_n = e^{O_n} = e^{-\ln(t)A+\ln(t)A} = e^{-\ln(t)A}e^{\ln(t)A}$, podemos concluir que t^A es invertible con inversa $(t^A)^{-1} = e^{-\ln(t)A} = e^{\ln(1/t)}A$. En conclusión, de estos dos hechos, t^A es matriz fundamental del sistema (11).

Puntaje:

- Sólo evaluar la operatoria. Asignar $(0,2$ pts.$)$ por cada igualdad desde la 3era.
- Por $(t^A)^{-1} = e^{-\ln(t)A}$ $(0,7$ pts.$)$ y concluir $(0,3$ pts.$)$.

2. Considere ahora el sistema

$$t\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\vec{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad t > 0. \tag{13}$$

a) (2 pts.) Muestre, reemplazando en (13), que una solución particular de (13), está dada por $\vec{x}_p = t^A\vec{u}(t)$, con $\vec{u}$ derivable, donde $\vec{u} = \int (s^A)^{-1}\begin{bmatrix} 1/s \\ 2/s \end{bmatrix} ds$.

Solución: Busquemos ahora una solución particular de (13) de la forma

$$\vec{x}_p = t^A \vec{u}, \tag{14}$$

con $\vec{u}$ derivable a determinar. Reemplazando en (13), $\vec{u}$ debe verificar

$$t(t^A\vec{u})' = A(t^A\vec{u}) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Equivalentemente, usando la parte anterior (haciendo la derivada respecto a t del producto matriz-vector)

$$t(t^A\vec{u}') = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Por lo tanto $\vec{u}$ verifica

$$\vec{u}' = (t^A)^{-1} \begin{bmatrix} 1/t \\ 2/t \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{u} = \int (s^A)^{-1} \begin{bmatrix} 1/s \\ 2/s \end{bmatrix} ds. \tag{17}$$

No consideramos constante de integración ya que se busca una solución particular.

Puntaje:

- Por imponer que $\vec{x}_p$ sea solución como en (15) (0,5 pts.).
- Aplicar la parte anterior para obtener (16) (1 pt.).
- Deducir (17) $(0,5$ pts.).

b) (2 pts.) Usar las partes anteriores para encontrar la solución general de (13).

Solución: Denotemos por $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tenemos que el polinomio característo de A está dado por

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda). \tag{18}$$

Luego, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, cuyos vectores propios son

- Para $\lambda_1 = 1$ el vector propio asociado es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- Para $\lambda_2 = 2$ el vector propio asociado es $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

De esta forma

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & -e^t + e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Alternativamente, se tiene también que $e^{At} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ con $\Phi(t)$ matriz fundamental dada por $\begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$, a partir de la base $\left\{ e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Teniendo en cuenta el ítem anterior concluimos que la solución del sistema homogéneo es

$$t^A = e^{A\ln(t)} = \begin{bmatrix} t & -t+t^2 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Ahora calculemos una solución particular, ya sabemos que la parte anterior que es de la forma $\vec{x}_p = t^A \vec{u}$, debemos para ello calcular

$$(s^A)^{-1} = e^{\ln(1/s)A} = \begin{bmatrix} 1/s & -1/s + 1/s^2 \\ 0 & 1/s^2 \end{bmatrix} \Longrightarrow (s^A)^{-1} \begin{bmatrix} 1/s \\ 2/s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/s^2 + 2/s^3 \\ 2/s^3 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Así $\vec{u}' = \begin{bmatrix} -1/t^2 + 1/t \\ -1/t^2 \end{bmatrix}$. Luego la solución del general del sistema es

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) =& \vec{x}_h + \vec{x}_p \\ =& \begin{bmatrix} t & -t+t^2 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & -t+t^2 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/t^2 + 1/t \\ -1/t^2 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} t & -t+t^2 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/t^2 + 1/t \\ -1/t^2 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Puntaje:

- Por lo valores propios $(0{,}2$ pts.$)$.
- Por lo vectores propios $(0, 6$ pts.$)$.
- Por (20) $(0{,}7$ pts.$)$, por alguna de las alternativas.
- Por (22) $(0, 5$ pts.$)$.

Control 1-P3

Considere el sistema a coeficientes variables

$$\vec{X}' = A(t)\vec{X}. \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

donde las componentes de la matriz $A(t)$ son funciones continuas y satisfacen que $A(t+\pi) = A(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental asociada al sistema (23), tal que $\Phi(0) = I_n$ (I_n es la identidad $n \times n$).

1. (3 pts.) Demostrar que $\Phi(t+\pi) = \Phi(t)\Phi(\pi) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.
   Ind: Defina la función matricial $t \mapsto \varphi(t) = \Phi(t+\pi) - \Phi(t)\Phi(\pi)$. Encuentre el problema diferencial que satisface y aplique adecuadamente el Teorema de existencia y unicidad (TEU) para concluir que $\varphi \equiv O_{n\times n}$ (matriz nula).

Solución: Consideremos $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por $\varphi(t) := \Phi(t+\pi) - \Phi(t)\Phi(\pi)$. Note φ está bien definida y además es diferenciable ya que la matriz fundamental lo es. Luego

$$\begin{aligned} \varphi'(t) =& \Phi'(t+\pi) - \Phi'(t)\Phi(\pi) \\ =& A(t+\pi)\Phi(t+\pi) - A(t)\Phi(t)\Phi(\pi) \\ =& A(t)\left[\Phi(t+\pi) - \Phi(t)\Phi(\pi)\right], \end{aligned} \tag{24}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho que las componentes de la matriz A son periódicas, de período π. De esta forma φ verifica $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$. Ahora como $\Phi(0) = I_n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(0) =& \Phi(\pi) - \Phi(0)\Phi(\pi) \\ =& \Phi(\pi) - I_n\Phi(\pi) \\ =& O_{n\times n} \end{aligned} \tag{25}$$

Así φ satisface el problema $\varphi' = A\varphi$ con condición inicial $\varphi(0) = O_{n\times n}$ Por lo tanto, del teorema de existencia y unicidad aplicado por columnas, podemos concluir que $\varphi(t) \equiv O_{n\times n}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es $\Phi(t+\pi) = \Phi(t)\Phi(\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Puntaje:

- Definir φ e identificar sus propiedades (0,5 pts.).
- Calculo de φ' y uso de hipótesis $A(t+\pi) = A(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$. (0,7 pts.).
- Por la condición inicial $\varphi(0) = O_{n\times n}$ (0,3 pts.).
- Identificar el problema que satisface φ (0, 5 pts.).
- Aplicación correcta del TEU al problema encontrado (0, 5 pts.).
- Por concluir (0, 5 ps.).

2. (3 pts.) Suponga que la matriz $\Phi(\pi)$ tiene un valor propio $\lambda = 1$. Muestre que en tal caso el sistema (23) posee una solución $\vec{X}(t)$, tal que $\vec{X}(t+\pi) = \vec{X}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Obs: Recuerde que si λ es un valor propio de un matriz A y $\vec{v}$ es su vector propio asociado entonces $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Solución: Consideremos $\vec{v}$ vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Como $\Phi(t)$ es matriz fundamental del sistema (23), se sigue que $\vec{X} = \Phi(t)\vec{v}$ es solución de dicho sistema. De esta forma se verifica, teniendo en cuenta el ítem anterior, que

$$\begin{aligned} \vec{X}(t+\pi) - \vec{X}(t) =& \left[\Phi(t+\pi) - \Phi(t)\right]\vec{v} \\ =& \left[\Phi(t)\Phi(\pi) - \Phi(t)\right]\vec{v} \\ =& \Phi(t)\left[\Phi(\pi) - I_n\right]\vec{v} \end{aligned} \tag{26}$$

Por lo tanto, si consideramos a $\vec{v}$ como el vector propio, de la matriz $\Phi(\pi)$, asociado al auto valor $\lambda = 1$; se concluye de (26) que $\vec{X}(t+\pi) = \vec{X}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Puntaje:

- Escribir las soluciones términos de Φ $(0,5$ pts.$)$.
- Por plantear y obtener el cálculo en (26) $(1$ pt.$)$.
- Argumentar la elección de $\vec{v}$ en base a la hipótesis $\lambda = 1$ valor propio de $\Phi(\pi)$ $(1$ pt.$)$.
- Concluir $(0,5$ pts.$)$.