

P1.

(a) Sea $(G, \cdot)$ un grupo.

(i) (1 punto) Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Muestre (sin usar inducción) que si G es abeliano entonces

$$\forall a, b \in G \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

(ii) (2 puntos) Muestre que si

$$\forall a, b \in G \quad (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

entonces G es abeliano.

Solución

(a)

(i)

$$(a \cdot b)^n = a \cdot b \cdot \underbrace{a \cdot b \cdots a \cdot b}_{n \text{ veces}} \cdot a \cdot b \quad \text{definición de } (a \cdot b)^n \text{ (0.4 puntos)}$$

$$= a \cdot \underbrace{\cdots}_{n \text{ veces}} \cdot a \cdot b \underbrace{\cdots}_{n \text{ veces}} \cdot b \quad \text{conmutatividad aplicada } n \text{ veces (0.4 puntos)}$$

$$= a^n \cdot b^n \quad \text{definición de } a^n \text{ y de } b^n \text{ (0.2 puntos)}$$

(ii)

$$(a \cdot b)^2 = abab \quad \text{por definición de } (a \cdot b)^2 \text{ (0.4 puntos)}$$

$$= a^2 b^2 \quad \text{por hipótesis (0.4 puntos)}$$

$$= aabb \quad \text{por definición de } a^2 \text{ y de } b^2 \text{ (0.4 puntos)}$$

es decir $abab = aabb$. Multiplicando por la izquierda de esta igualdad por a^{-1} y por la derecha por b^{-1} llegamos a

$$\begin{aligned} a^{-1}(abab)b^{-1} &= a^{-1}(aabb)b^{-1} \\ (a^{-1}a)ba(bb^{-1}) &= (a^{-1}a)ab(bb^{-1}) \end{aligned} \quad \text{asociando (0.4 puntos)}$$

$$ebae = eabe \quad \text{aplicando definición de inverso}$$

$$ba = ab \quad \text{definición de neutro (0.4 puntos)}$$

es decir el grupo es conmutativo.

(b) Considere $E = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ con la suma y el producto usual, es decir

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \quad (a + b\sqrt{2}) \cdot (a' + b'\sqrt{2}) = aa' + 2bb' + (ab' + ba')\sqrt{2}$$

(a) (1 punto) Encuentre el neutro de la suma.

(b) (1 punto) ¿Existe el neutro de la multiplicación? Justifique

(c) (1 punto) Encuentre los divisores de cero.

Observación: no es necesario mostrar que $(E, +, \cdot)$ es anillo.

Solución

(a) El neutro es $0 = 0 + 0\sqrt{2}$. En efecto

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} + 0 + 0\sqrt{2} &= (a + 0) + (b + 0)\sqrt{2} \\ &= a + b\sqrt{2} \end{aligned} \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$\begin{aligned} 0 + 0\sqrt{2} + a + b\sqrt{2} &= (0 + a) + (0 + b)\sqrt{2} \\ &= a + b\sqrt{2} \end{aligned} \quad (0.5 \text{ puntos})$$

(b) Sí, en efecto $1 + 0\sqrt{2} \in E$ es tal que

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2}) \cdot (1 + 0\sqrt{2}) &= a \cdot 1 + 2 \cdot b \cdot 0 + (a \cdot 0 + b \cdot 1)\sqrt{2} \\ &= a + b\sqrt{2} \end{aligned} \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$\begin{aligned} (1 + 0\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) &= 1 \cdot a + 2 \cdot 0 \cdot b + (0 \cdot a + 1 \cdot b)\sqrt{2} \\ &= a + b\sqrt{2} \end{aligned} \quad (0.5 \text{ puntos})$$

(c) Sea $x = a + b\sqrt{2} \in E$ un divisor de cero, es decir $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Se tiene entonces que existe $x' = a' + b'\sqrt{2} \in E$ con $a' \neq 0 \vee b' \neq 0$ tal que

$$aa' + 2bb' + (ab' + ba')\sqrt{2} = 0 \implies \begin{cases} aa' + 2bb' = 0 & (1) \\ ab' + ba' = 0 & (2) \end{cases} \quad (0.2 \text{ puntos})$$

Multiplicamos (1) por b y (2) por a para luego restar

$$\begin{aligned} baa' + 2b^2b' - (a^2b' + aba') &= 0 \implies 2b^2b' - a^2b' \\ &\implies (2b^2 - a^2)b' = 0 \\ &\implies b' = 0 \vee 2b^2 - a^2 = 0 \quad (3) \quad (0.4 \text{ puntos}) \end{aligned}$$

Si $b' = 0$ reemplazamos en (1) y en (2) para obtener que $aa' = 0 \wedge ba' = 0$. Notamos que a' no puede ser nulo pues sabemos que $x' \neq 0$, lo que nos dice que $a = 0 \wedge b = 0$, pero esto tampoco puede ocurrir, pues $x \neq 0$. Se concluye que $b' \neq 0$ (0.2 punto) y por lo tanto, gracias a (3) se tiene que $2b^2 - a^2 = 0$. Sin embargo

$$2b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (a + b\sqrt{2})(-a + b\sqrt{2}) = 0$$

y por tanto $a + b\sqrt{2} = 0 \vee -a + b\sqrt{2} = 0$. Se deduce que $a = -b\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, lo cual no es posible, pues $x \in E$ y del mismo modo $a = b\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, lo cual tampoco es posible nuevamente pues $x \in E$. (0.2 puntos) En conclusión E no tiene divisores de 0.

P2.

(a) (3 puntos) Muestre (sin usar inducción) que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ se tiene que

$$(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = 2 \sec^n \theta \cos n\theta$$

(b) (3 puntos) Para $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ encuentre todas las soluciones complejas de

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) = i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sin(-k\theta)$$

Solución

(a) Sea θ_1 el argumento de $1 + i \tan \theta$. Dado que $\operatorname{Re} 1 + i \tan \theta = 1 > 0$ se tiene que

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{\tan \theta}{1}\right) = \theta \quad (0.4 \text{ puntos})$$

Además $|1 + i \tan \theta| = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{\sec^2 \theta} = |\sec \theta|$, (0.4 puntos) de esta forma

$$1 + i \tan \theta = |\sec \theta| e^{i\theta} \text{ (0.4 puntos)} \implies (1 + i \tan \theta)^n = |\sec \theta|^n e^{in\theta} \text{ (0.4 puntos)}$$

Por otro lado $1 - i \tan \theta = \overline{1 + i \tan \theta} = |\sec \theta| e^{-i\theta}$ (0.3 puntos) y por tanto

$$(1 - i \tan \theta)^n = |\sec \theta|^n e^{-ni\theta} \text{ (0.3 puntos)}$$

Así

$$\begin{aligned} (1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n &= |\sec \theta|^n e^{in\theta} + |\sec \theta|^n e^{-ni\theta} \\ &= |\sec \theta|^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\ &= |\sec \theta|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) + \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)) \quad (0.4 \text{ puntos}) \\ &= |\sec \theta|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)) \\ &= 2|\sec \theta|^n \cos(n\theta) \quad (0.4 \text{ puntos}) \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) = i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sin(-k\theta) \implies \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) = -i \sum_{k=0}^{n-1} z^k \sin(k\theta) \quad (0.4 \text{ puntos})$$

$$\implies \sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) + \sum_{k=0}^{n-1} iz^k \sin(k\theta) = 0$$

$$\implies \sum_{k=0}^{n-1} z^k (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = 0$$

$$\implies \sum_{k=0}^{n-1} z^k e^{ik\theta} = 0 \quad (0.4 \text{ puntos})$$

$$\implies \sum_{k=0}^{n-1} (ze^{i\theta})^k = 0 \quad (0.4 \text{ puntos})$$

Notamos que $ze^{i\theta} \neq 1$ ya que en caso contrario $\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n - 1 = 0$, lo cual no es posible pues por hipótesis $n \geq 2$.

(0.4 puntos). De esta manera

$$\sum_{k=0}^{n-1} (ze^{i\theta})^k = \frac{1 - (ze^{i\theta})^n}{1 - ze^{i\theta}} = 0 \text{ (0.5 puntos)}$$

y en tal caso $(ze^{i\theta})^n = 1$ es decir $ze^{i\theta}$ es una raíz n -ésima de la unidad, por lo que

$$ze^{i\theta} = e^{2\pi ik/n} \quad k = 0, \dots, n-1 \text{ (0.5 puntos)}$$

y se deduce entonces que la ecuación tiene n soluciones dadas por

$$z = e^{\frac{2\pi ik}{n} - i\theta} \quad k = 0, \dots, n-1 \text{ (0.4 puntos)}$$

P3.

Sean $+$ y $\cdot$ el producto usual en $\mathbb{C}$. Definamos

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

(a) (1.5 puntos) Decida si $z_1 * z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2$ es una l.c.i. en S_1 o no

(b) (1.5 puntos) Muestre que S_1 con la multiplicación usual es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

(c) (1.5 puntos) ¿Es $(S_1, +, \cdot)$ un anillo? Justifique.

(d) (1.5 puntos) Y si cambiamos la suma usual por la suma de Hadamard dada por

$$z_1 \oplus z_2 = \frac{z_1 + z_2}{|z_1 + z_2|}$$

¿es $(S_1, \oplus, \cdot)$ un anillo?

Solución

(a) Sabemos que $\cdot$ es una l.c.i, luego $z_1 \cdot \bar{z}_2 \in \mathbb{C}$ (0.5 puntos), además

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot \bar{z}_2| &= |z_1| \cdot |\bar{z}_2| \text{ (0.5 puntos)} \\ &= |z_1| |\bar{z}_2| \\ &= |z_1| |z_2| \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \text{ (0.5 puntos)}\end{aligned}$$

por lo que $z_1 \cdot \bar{z}_2 \in S_1$ y por tanto $\cdot$ es una l.c.i

(b)

• S_1 no es vacío pues $z = 1$ es tal que $|z| = 1$ y por tanto $1 \in S_1$ (0.5 puntos)

• Sean $z_1, z_2 \in S_1$. Se tiene que $|z_1 z_2^{-1}| = |z_1| |z_2^{-1}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{1} = 1$ (1 punto), por lo que $z_1 z_2^{-1} \in S_1$

(c) No, de hecho $+$ no es una l.c.i ya que $1 \in S_1$, pero $1 + 1 = 2 \notin S_1$. (1.5 puntos). Observación: no es la única forma de resolver el ejercicio, ante cualquier duda consultar.

(d) No pues $(S_1, \oplus)$ no es un grupo. En efecto $(S_1, \oplus)$ no es l.c.i en efecto $i, -i \in S_1$ pues $|i| = |-i| = 1$, pero

$$i \oplus -i = \frac{i - i}{|i - i|}$$

lo cual no está definido. (1.5 puntos) Observación: no es la única forma de resolver el ejercicio, ante cualquier duda consultar.