



Control 3

P1. A partir de una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A , se define una nueva relación $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ en A mediante

$$\forall x, y \in A, \quad x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y \iff x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x.$$

i) (1.5 pts.) Demuestre que $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ es una relación simétrica.

Solución:

Sean $x, y \in A$ cualquiera.

$$\begin{aligned} x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y &\iff x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x && \text{(definición de } \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \text{)} \\ &\iff y\mathcal{R}x \wedge x\mathcal{R}y && \text{(conmutatividad del } \wedge \text{)} \\ &\iff y\mathcal{S}_{\mathcal{R}}x. && \text{(definición de } \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \text{)} \end{aligned}$$

(1.2 pts)

Con esto $\forall x, y \in A, x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y \iff y\mathcal{S}_{\mathcal{R}}x$, y por lo tanto $\forall x, y \in A, x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y \implies y\mathcal{S}_{\mathcal{R}}x$, que es la definición de simetría. **(0.3 pts)**

ii) (1.5 pts.) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es reflexiva y transitiva, entonces la nueva relación $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ es de equivalencia.

Solución:

Hay que verificar que $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ es reflexiva, simétrica y transitiva. **(0.3 pts.)**

De la parte i) ya se sabe que es Simétrica, veamos las otras dos propiedades. **(0.2 pts.)**

Reflexiva: **(0.5 pts.)**

Para $x \in A$ cualquiera, como $\mathcal{R}$ es reflexiva, entonces $x\mathcal{R}x$. Luego también $x\mathcal{R}x \wedge x\mathcal{R}x$, así, por definición de $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$, $x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}x$.

Transitiva: **(0.5 pts.)**

Sean $x, y, z \in A$ cualquiera,

$$\begin{aligned} x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y \wedge y\mathcal{S}_{\mathcal{R}}z &\iff x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \wedge y\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{R}y && \text{(definición de } \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \text{)} \\ &\iff (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \wedge (z\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) && \text{(propiedades del } \wedge \text{)} \\ &\implies x\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{R}x && \text{(transitividad de } \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \text{)} \\ &\iff x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}z. && \text{(definición de } \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \text{)} \end{aligned}$$

iii) (1.5 pts.) Recordemos la definición de la relación $|$ de divisibilidad en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros:

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad m|n \iff \exists k \in \mathbb{Z}, n = k \cdot m.$$

Sabemos que $|$ es reflexiva y transitiva en $\mathbb{Z}$ (NO necesita demostrarlo), por lo que, tomando como $\mathcal{R}$ en ii) la divisibilidad $|$, $\mathcal{S}_|$ es de equivalencia.

Para $n \in \mathbb{Z}$ cualquiera, **se pide** determinar su clase de equivalencia respecto a la relación $\mathcal{S}_|$.

Solución:

Sea $n \in \mathbb{Z}$ cualquiera y anotemos por $[n]$ su clase de equivalencia para la relación $\mathcal{S}_|$ en $\mathbb{Z}$. Entonces, dado $m \in \mathbb{Z}$ cualquiera:

$$\begin{aligned}
 m \in [n] &\iff m\mathcal{S}_|n && \text{(definición de clase de equivalencia, 0.3 pts)} \\
 &\iff m|n \wedge n|m && \text{(definición de } \mathcal{S}_|) \\
 &\iff \exists k, l \in \mathbb{Z}, n = k \cdot m \wedge m = l \cdot n && \text{(definición de } |) \\
 &\implies \exists k, l \in \mathbb{Z}, m = l \cdot k \cdot m && \text{(reemplazando } n \text{ en la segunda igualdad)} \\
 &\iff \exists k, l \in \mathbb{Z}, m = 0 \vee l \cdot k = 1 && \text{(simplificando } m \text{ (cuando se puede))} \\
 &\iff \exists k, l \in \mathbb{Z}, m = 0 \vee k = l = 1 \vee k = l = -1. && \text{(puesto que } k \text{ y } l \text{ son enteros)}
 \end{aligned}$$

Las dos últimas expresiones se traducen en que $m = \pm n$ (puesto que $n = k \cdot m$) y análogamente $m = 0$ se traduce en que $m = n = 0$, lo que también corresponde a $m = \pm n$. **(0.9 pts)**

De lo anterior se deduce que en general,

$$[n] = \{n, -n\}. \quad \textbf{(0.3 pts)}$$

Observación: Como quedó estructurado, el desarrollo de arriba concluye con una implicación y no con la equivalencia necesaria para demostrar la igualdad anterior. La implicación recíproca es muy simple, y no se exigirá para tener el puntaje completo.

iv) (1.5 pts.) Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A , demuestre que $\forall x, y \in A, x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y \iff x = y$.

Solución:

Sean $x, y \in A$ cualquiera.

$$\begin{aligned}
 x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y &\iff x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x && \text{(definición de } \mathcal{S}_{\mathcal{R}}) \\
 &\implies x = y. && \text{(como } \mathcal{R} \text{ es de orden, es antisimétrica)}
 \end{aligned}$$

(1.2 pts.)

Para completar la equivalencia pedida, notar que como $\mathcal{R}$ es relación de orden, es refleja y transitiva, luego por la parte i), $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ es relación de equivalencia y por lo tanto refleja, así $x = y \implies x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y$.

(0.3 pts.)

P2. a) Sean A, B conjuntos, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Considere la función $f : A \times B \rightarrow A$ definida por $f(x, y) = x$.

i) (2.0 pts.) Demuestre que $f^{-1}(C) = C \times B$.

Solución:

Para demostrar la igualdad de conjuntos pedida, sea $(x, y) \in A \times B$ cualquiera.

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in f^{-1}(C) &\iff f(x, y) \in C && \text{(definición de preimagen)} \\
 &\iff x \in C && \text{(definición de la función } f) \\
 &\iff x \in C \wedge y \in B && \text{(como } (x, y) \in A \times B, \text{ entonces } y \in B \text{ es verdadero)} \\
 &\iff (x, y) \in C \times B. && \text{(definición de producto cartesiano)}
 \end{aligned}$$

(2.0 pts.)

ii) (2.0 pts.) Si $D \neq \emptyset$, demuestre que $f(C \times D) = C$.

Solución:

Para demostrar la igualdad de conjuntos pedida, sea $x \in A$ cualquiera.

$$\begin{aligned}
 x \in f(C \times D) &\iff \exists (u, v) \in C \times D, f(u, v) = x && \text{(definición de imagen de un subconjunto)} \\
 &\iff \exists (u, v) \in C \times D, u = x && \text{(definición de la función } f) \\
 &\iff \exists u \in C, \exists v \in D, u = x && \text{(def. de prod. cartesiano y props. de cuantifs.)} \\
 &\iff \exists u \in C, u = x && (D \neq \emptyset) \\
 &\iff x \in C. && \text{(pertenecer a } C \text{ es lo mismo que ser igual a algún elemento de } C)
 \end{aligned}$$

(2.0 pts.)

b) (2.0 pts.) Sean A, B conjuntos y $g : A \rightarrow B$ una función que satisface la propiedad

$$\forall C, D \subseteq A, [C \subsetneq D \implies g(C) \neq g(D)].$$

Pruebe que g es inyectiva.

Observación: La notación $C \subsetneq D$ significa que $C \subseteq D$ pero $C \neq D$, por lo cual D tiene al menos un elemento que no pertenece a C .

Indicación: Utilice la propiedad satisfecha por g , con C, D adecuados.

Solución:

Usaremos la contrarrecíproca de la caracterización usual de inyectividad, esto es,

$$g \text{ es inyectiva} \iff \forall x, y \in A, [x \neq y \implies g(x) \neq g(y)].$$

Sean entonces $x, y \in A$ cualquiera, tales que $x \neq y$.

Si consideramos los conjuntos

$$C = \{x\} \text{ y } D = \{x, y\},$$

se tiene que evidentemente $C \subseteq D$. Como y pertenece a D pero no a C (porque $x \neq y$), entonces $C \subsetneq D$. **(1.0 pto.)**

Luego, por la propiedad que satisface la función g , se tiene que $g(C) \neq g(D)$, lo que se traduce en

$$\{g(x)\} \neq \{g(x), g(y)\},$$

de lo que se deduce que $g(x) \neq g(y)$.

(1.0 pto.)

DURACIÓN: 1 hora y 30 minutos.

Justifique adecuadamente sus respuestas.

No olvide poner su NOMBRE y RUT en sus hojas de respuesta para identificarlas.

¡¡Mucho éxito!!