



PAUTA CONTROL 2 - RECUPERATIVO

P1.- Considere el siguiente sistema lineal no homogéneo, para $t \in]-\pi/4, \pi/4[$:

$$x' = y + \cos(2t)$$

$$y' = 4 \sec^2(2t)x + 2 \operatorname{tg}(2t)y$$

(a) (0,5 pts) Defina X , $A(t)$ y $B(t)$ de modo que el sistema se pueda escribir vectorialmente de la forma $X' = A(t)X + B(t)$.

Solución: Si definimos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, entonces tenemos

$$X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 \sec^2(2t) & 2 \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix}}_{A(t)} X + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{B(t)}.$$

Puntaje:

- Definir el vector X . (0,2 pts.)
- Desarrollar e identificar las otras matrices. (0,3 pts.)

(b) (2,0 pts) Considere las siguientes funciones vectoriales definidas para $t \in]-\pi/4, \pi/4[$:

$$Y_1(t) = \sec(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix}; \quad Y_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \operatorname{tg}(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix}.$$

Muestre que $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ son soluciones del sistema homogéneo asociado.

Solución: Debemos mostrar que $Y_1'(t) = A(t)Y_1(t)$ y $Y_2'(t) = A(t)Y_2(t)$. Primero con

Y_1 :

$$\begin{aligned} Y_1'(t) &= 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} + \sec(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \sec^2(2t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) \\ 4 \sec(2t) \operatorname{tg}^2(2t) + 4 \sec^3(2t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A(t)Y_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 \sec^2(2t) & 2 \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sec(2t) \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) \\ 4 \sec^3(2t) + 4 \sec(2t) \operatorname{tg}^2(2t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Tenemos que (1) y (2) son iguales. Ahora con Y_2 :

$$\begin{aligned} Y_2'(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \sec^2(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} + \operatorname{tg}(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \sec^2(2t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \sec^2(2t) \\ 8 \sec^2(2t) \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A(t)Y_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 \sec^2(2t) & 2 \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg}(2t) \\ 2 + 2 \operatorname{tg}^2(2t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 \sec^2(2t) & 2 \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \sec^2(2t) \\ 4 \sec^2(2t) \operatorname{tg}(2t) + 4 \operatorname{tg}(2t) \sec^2(2t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

obteniendo la otra igualdad entre (3) y (4).

Puntaje:

- Reemplaza cada función en el sistema homogéneo. (1,0 pts.)
- Calcula bien las derivadas. (0,6 pts.)
- Verifica las igualdades. Usa identidades trigonométricas si es necesario. (0,4 pts.)

(c) (1,0 pts) Calcule, usando lo anterior, la matriz fundamental canónica $\Phi(t)$ del sistema, considerando $t_0 = 0$.

Solución: Las columnas de la matriz $\Phi(t)$ son soluciones del sistema homogéneo asociado, y además $\Phi(0) = I$, la matriz identidad.

Las únicas soluciones del sistema homogéneo que conocemos son $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$. Reemplazando en $t = 0$ tenemos

$$Y_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Sabemos que $Z(t) = Y_2(t)/2$ también es solución de la ecuación homogénea asociada, pues todas sus soluciones forman un espacio vectorial.

Si definimos

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= [Y_1(t) \ Y_2(t)] \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & 1 + \operatorname{tg}^2(2t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & \sec^2(2t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Así que esta $\Phi(t)$ encontrada es la matriz fundamental canónica.

Solución alternativa: Definimos la matriz

$$\begin{aligned}M(t) &= [Y_1(t) \ Y_2(t)] \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Como $M(0)$ es invertible, entonces $M(t)$ es una matriz fundamental del sistema y

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= M(t)M(0)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & \sec^2(2t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puntaje:

- Muestra que conoce las propiedades de la matriz fundamental canónica de un sistema: sus columnas son soluciones del sistema homogéneo, y en $t = t_0$ es la matriz identidad. (0,4 pts.)
- Construye la matriz fundamental canónica con combinaciones de las soluciones de la parte (b) (chequeando que $\Phi(0) = I$) ó a partir de la matriz fundamental cuyas columnas son las soluciones de la parte (b) (previo chequeo de la invertibilidad en $t = 0$). (0,6 pts.)

(d) (2,5 pts) Encuentre la solución general del sistema.

Solución: La solución general $X(t)$ del sistema cumple que $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$, donde X_h es la solución general del sistema homogéneo asociado, y $X_p(t)$ es una solución particular.

Las columnas de $\Phi(t)$ forman una base para el espacio de las soluciones del sistema

homogéneo asociado. Por lo tanto

$$X_h(t) = C_1 \begin{bmatrix} \sec(2t) \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Por el método de variación de parámetros $X_p(t) = \Phi(t)F(t)$, donde la función vectorial F cumple:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \Phi(t)^{-1}B(t) \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & \sec^2(2t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & -\operatorname{sen}(2t)/2 \\ -2 \operatorname{tg}(2t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Podemos escoger una primitiva, por ejemplo $F(t) = \begin{bmatrix} t \\ \cos(2t) \end{bmatrix}$. Una solución particular es

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t)F(t) \\ &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & \sec^2(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \cos(2t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t \sec(2t) + \operatorname{sen}(2t)/2 \\ 2t \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) + \sec(2t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

La solución general es

$$X(t) = C_1 \begin{bmatrix} \sec(2t) \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \sec(2t) + \operatorname{sen}(2t)/2 \\ 2t \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) + \sec(2t) \end{bmatrix}$$

Alternativa: Cualquier solución del sistema se puede escribir como

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi(u)^{-1}B(u) du,$$

donde el primer término es solución de la ecuación homogénea asociada y el segundo

término es una solución particular. Así

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \Phi(t)X_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi(u)^{-1} B(u) du \\
 &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & \sec^2(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & \sec^2(2t) \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -\operatorname{sen}(2u) \end{bmatrix} du \\
 &= \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & \sec^2(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \sec(2t) & \operatorname{tg}(2t)/2 \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) & \sec^2(2t) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} t \\ \cos(2t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= C_1 \begin{bmatrix} \sec(2t) \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} t \sec(2t) + \operatorname{sen}(2t)/2 \\ 2t \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) + \sec(2t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix} \\
 &= C_1 \begin{bmatrix} \sec(2t) \\ 2 \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) \end{bmatrix} + (C_2 - 1) \begin{bmatrix} \operatorname{tg}(2t) \\ 2 \sec^2(2t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \sec(2t) + \operatorname{sen}(2t)/2 \\ 2t \sec(2t) \operatorname{tg}(2t) + \sec(2t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Puntaje:

- Deja claro, en algún momento de su desarrollo, que la solución general buscada se escribe como la suma de una solución particular con la solución general de la ecuación homogénea asociada. (0,5 pts.)
- Calcula la inversa de $\Phi(t)$ usando quizá identidades trigonométricas. (0,5 pts.)
- Multiplica $\Phi(t)^{-1}$ con $B(t)$ usando identidades trigonométricas. (0,4 pts.)
- Integra el resultado de lo anterior. (0,3 pts.)
- Encuentra la solución particular multiplicando la matriz $\Phi(t)$ por el resultado de la integral anterior. (0,3 pts.)
- Calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada usando las columnas de $\Phi(t)$ (ó $\Phi(t)$ misma). (0,5 pts.)

P2.- (a) Sea κ una constante real. Considere la matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \kappa & 2\kappa - 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

I. (0,5 pts) Encuentre los valores propios de A .

Solución: Los valores propios de una matriz triangular son los valores de la diagonal, es decir, $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$.

Alternativa: Calculamos el polinomio característico de A :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & \kappa & 2\kappa - 3 \\ 0 & 1 - \lambda & 6 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(-2 - \lambda).$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$.

Puntaje:

- Encuentra los valores propios con algún método correcto. (0,5 pts.)

II. (0,5 pts) Muestre que A es diagonalizable si $\kappa = 0$.

Solución: Cuando $\kappa = 0$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios siguen siendo los mismos porque no dependen de κ . Como el único que tiene multiplicidad algebraica mayor que 1 es $\lambda = 1$, de multiplicidad algebraica 2, entonces A es diagonalizable ssi la dimensión de $\ker(A - I)$ es igual a 2.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $A - I$ tiene rango 1 y, gracias al teorema núcleo-imagen, esto implica que la dimensión de $\ker(A - I)$ es 2. Por lo tanto A es diagonalizable.

Puntaje:

- Chequea, de algún modo, que $\ker(A - I)$ tiene dimensión 2. (0,4 pts.)
- Concluye que A es una matriz diagonalizable. (0,1 pts.)

III. (1,0 pts) Para $\kappa = 0$, encuentre la solución general del sistema homogéneo $X' = AX$.

Solución: Encontremos una base de vectores propios para cada valor propio de A

con $\kappa = 0$.

$$\begin{aligned}
 A - (-2)I &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 (A + 2I)v = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow v_2 = -2v_3 \wedge v_1 = v_3 \\
 &\Rightarrow v \in \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \\
 A - I &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 (A - I)v = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow v_3 = 0 \wedge v_1 = v_1 \wedge v_2 = v_2 \\
 &\Rightarrow v \in \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle
 \end{aligned}$$

La solución general del sistema homogéneo, entonces, se puede escribir

$$X(t) = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alternativa: Después de calcular una base de vectores propios para cada valor propio de A , se puede encontrar una diagonalización (hay varias, acá pondremos una de ellas), y después calcular la exponencial de A .

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La solución general sería

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{tA} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= ce^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + (a-c)e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (b+2c)e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puntaje:

- Encuentra una base vectores propios para cada valor propio de A . (0,6 pts.)
- Usa correctamente las dos bases para escribir la solución general (directamente o calculando la exponencial), como combinación lineal ó desarrollada en un solo vector. (0,4 pts.)

IV. (1,0 pts) Encuentre X_0 , de modo que si $X(0) = X_0$, entonces la solución $X(t)$ cumple que $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Solución: La solución general

$$X(t) = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiende a infinito, salvo cuando $C_2 = C_3 = 0$. En este caso $X(0)$ queda un múltiplo del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, y hay una única solución que tiene esa condición inicial en $t = 0$. La elección de X_0 como cualquier múltiplo de este vector cumple con lo solicitado.

Puntaje:

- Analizar los elementos que tienden a 0 y los que tienden a $+\infty$. (0,4 pts.)
- Concluir consistentemente. (0,6 pts.)

(b) (2,0 pts) Encontrar, usando transformada de Laplace, la solución general de la ecuación

$$x'' - 4x' + 4x = e^{2t} \left(\sum_{k=0}^{29} t^k \right).$$

Solución: Para aplicar la transformada de Laplace, escribimos la ecuación como

$$x'' - 4x' + 4x = \left(\sum_{k=0}^{29} e^{2t} t^k \right).$$

Si denotamos $x(0)$ y $x'(0)$ por C_1 y C_2 respectivamente, aplicamos la transformada de Laplace y tenemos

$$\begin{aligned} s^2 \mathcal{L}[x](s) - sC_1 - C_2 - 4(s\mathcal{L}[x](s) - C_1) + 4\mathcal{L}[x](s) &= \sum_{k=0}^{29} \mathcal{L}[e^{2t} t^k](s) \\ (s^2 - 4s + 4)\mathcal{L}[x](s) - (s - 4)C_1 - C_2 &= \sum_{k=0}^{29} \mathcal{L}[t^k](s - 2) \\ (s - 2)^2 \mathcal{L}[x](s) &= (s - 4)C_1 + C_2 + \sum_{k=0}^{29} \frac{k!}{(s - 2)^{k+1}} \\ \mathcal{L}[x](s) &= \frac{(s - 4)C_1 + C_2}{(s - 2)^2} + \sum_{k=0}^{29} \frac{k!}{(s - 2)^{k+3}} \end{aligned} \quad (12)$$

Comenzamos modificar algebraicamente los términos de la derecha para poder invertir la transformada.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x](s) &= \frac{(s - 2)C_1 + C_2 - 2C_1}{(s - 2)^2} + \sum_{k=2}^{31} \frac{(k - 2)!}{(s - 2)^{k+1}} \\ &= \frac{C_1}{s - 2} + \frac{C_2 - 2C_1}{(s - 2)^2} + \sum_{k=2}^{31} \frac{1}{(k - 1)k} \cdot \frac{k!}{(s - 2)^{k+1}} \\ &= C_1 \mathcal{L}[e^{2t}](s) + (C_2 - 2C_1) \mathcal{L}[t](s - 2) + \sum_{k=2}^{31} \frac{1}{(k - 1)k} \mathcal{L}[t^k](s - 2) \\ &= C_1 \mathcal{L}[e^{2t}](s) + (C_2 - 2C_1) \mathcal{L}[e^{2t} t](s) + \sum_{k=2}^{31} \frac{1}{(k - 1)k} \mathcal{L}[e^{2t} t^k](s) \end{aligned} \quad (13)$$

Por lo tanto la solución general es

$$x(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 - 2C_1) t e^{2t} + \sum_{k=2}^{31} \frac{t^k e^{2t}}{(k - 1)k}$$

Puntaje:

Cálculo de la transformada

- Deja todo en función de las condiciones iniciales.

(0,1 pts.)

- Aplica correctamente la transformada de las derivadas. (0,3 pts.)
- Usa la linealidad de la transformada correctamente en todo momento. (0,3 pts.)
- Traslada correctamente en la variable s al transformar las funciones multiplicadas por una exponencial. (0,3 pts.)
- Despeja la transformada de la incógnita x (12). (0,1 pts.)

Cálculo de la transformada inversa

- Cada vez que es necesario, realiza los arreglos algebraicos que permiten invertir la transformada. (0,3 pts.)
- Reconoce cuando hay traslación en la variable s y aplica la fórmula correspondiente, haciendo aparecer la exponencial correcta. (0,4 pts.)
- Obtiene finalmente $x(t)$, aplicando linealidad. (0,2 pts.)

(c) (1,0 pts) Encuentre una función g , continua para $t > 0$, de modo que

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \text{Arctg}\left(\frac{s+1}{2}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Solución: Usaremos la fórmula de la derivada de la transformada:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

Tomando la igualdad dada y derivando con respecto a s tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)](s) &= \text{Arctg}\left(\frac{s+1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \\ \frac{d}{ds}\mathcal{L}[g(t)](s) &= \frac{1}{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{d}{ds}\mathcal{L}[g(t)](s) &= \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \\ \frac{d}{ds}\mathcal{L}[g(t)](s) &= \mathcal{L}[\text{sen}(2t)](s+1) \\ -\mathcal{L}[tg(t)](s) &= \mathcal{L}[e^{-t}\text{sen}(2t)](s).\end{aligned}\tag{14}$$

Luego podemos elegir

$$\begin{aligned}-tg(t) &= e^{-t}\text{sen}(2t) \\ g(t) &= -\frac{e^{-t}\text{sen}(2t)}{t},\end{aligned}$$

que es una función continua para $t > 0$ (en realidad, es continua en todo $\mathbb{R}$).

Solución alternativa: Aunque es muy similar, usaremos la otra fórmula

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](u) du.$$

Como la derivada de $\text{Arctg}((s+1)/2) - \pi/2$ es igual a $2/((s+1)^2 + 4)$, podemos concluir que

$$\text{Arctg}\left(\frac{s+1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = \int_s^{+\infty} -\frac{2}{(u+1)^2 + 4} du,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)](s) &= \int_s^{+\infty} -\frac{2}{(u+1)^2 + 4} du \\ &= \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[-\sin(2t)](u+1) du \\ &= \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[-e^{-t}\sin(2t)](u) du \\ &= \mathcal{L}\left[-\frac{e^{-t}\sin(2t)}{t}\right](s). \end{aligned}$$

Se puede elegir

$$g(t) = -\frac{e^{-t}\sin(2t)}{t},$$

que es continua ...

Puntaje:

- Usa correctamente la fórmula de la derivada (o de la integral) de una transformada de Laplace. (0,3 pts.)
- Calcula la derivada de la arco-tangente. (0,2 pts.)
- Identifica la traslación en la variable s y, al invertir la transformada, multiplica por la exponencial correcta. (0,3 pts.)
- Invierte las transformadas y nota que la función resultante es continua. (0,2 pts.)

P3.- (a) (2,5 pts) Si x es el desplazamiento en un sistema masa-resorte con respecto al reposo, entonces se satisface la ecuación diferencial

$$mx'' + bx' + kx = f(t),$$

donde $m > 0$ es la masa del resorte, $b \geq 0$ es el coeficiente de roce, $k > 0$ es el coeficiente del resorte, y $f(t)$ es un forzamiento externo.

Encuentre el desplazamiento $x(t)$, para $t > 0$, sabiendo que $m = 1$, $k = 4$, $b = 0$, que la masa parte del reposo, y f está definida por

$$f(t) = \begin{cases} 12\sin(t) & \text{si } t < \pi \\ 0 & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

Solución: Usando los valores para m , b , k , y funciones de Heaviside tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} x'' + 4x &= [1 - H(t - \pi)] 12 \operatorname{sen}(t) \\ &= 12 \operatorname{sen}(t) - 12H(t - \pi) \operatorname{sen}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Considerando que parte del reposo, es decir, $x(0) = x'(0) = 0$, aplicamos transformada de Laplace

$$\begin{aligned} s^2 \mathcal{L}[x](s) - s \cdot 0 - 0 + 4\mathcal{L}[x] &= 12\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) - 12\mathcal{L}[H(t - \pi) \operatorname{sen}(t)](s) \\ (s^2 + 4)\mathcal{L}[x](s) &= \frac{12}{s^2 + 1} - 12e^{-\pi s} \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t + \pi)](s) \\ (s^2 + 4)\mathcal{L}[x](s) &= \frac{12}{s^2 + 1} + 12e^{-\pi s} \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) \\ (s^2 + 4)\mathcal{L}[x](s) &= \frac{12}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \frac{12}{s^2 + 1} \\ \mathcal{L}[x](s) &= \frac{12}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} + e^{-\pi s} \frac{12}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \end{aligned} \quad (16)$$

Del 2do al 3er paso se utilizó que $\operatorname{sen}(t + \pi) = \operatorname{sen}(t) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(t) = -\operatorname{sen}(t)$. Ahora aplicamos fracciones parciales.

$$\frac{12}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}.$$

Los valores que permiten esta igualdad se puede ver que son $A = C = 0$, $B = 4$ y $D = -4$. Así

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x](s) &= \frac{4}{s^2 + 1} - \frac{4}{s^2 + 4} + e^{-\pi s} \frac{4}{s^2 + 1} - e^{-\pi s} \frac{4}{s^2 + 4} \\ &= 4\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) - 2\mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](s) \\ &\quad + 4e^{-\pi s} \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) - 2e^{-\pi s} \mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](s) \\ &= 4\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) - 2\mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](s) \\ &\quad + 4\mathcal{L}[H(t - \pi) \operatorname{sen}(t - \pi)](s) - 2\mathcal{L}[H(t - \pi) \operatorname{sen}(2(t - \pi))](s) \\ &= 4\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s) - 2\mathcal{L}[\operatorname{sen}(2t)](s) \\ &\quad - 4\mathcal{L}[H(t - \pi) \operatorname{sen}(t)](s) - 2\mathcal{L}[H(t - \pi) \operatorname{sen}(2t)](s), \end{aligned} \quad (17)$$

donde se usó que $\operatorname{sen}(t - \pi) = -\operatorname{sen}(t)$ y $\operatorname{sen}(2(t - \pi)) = \operatorname{sen}(2t)$. Luego

$$x(t) = 4 \operatorname{sen}(t) - 2 \operatorname{sen}(2t) - 4H(t - \pi) \operatorname{sen}(t) - 2H(t - \pi) \operatorname{sen}(2t) \quad (19)$$

o, escrito de otra manera

$$x(t) = \begin{cases} 4 \operatorname{sen}(t) - 2 \operatorname{sen}(2t) & \text{si } t < \pi \\ -4 \operatorname{sen}(2t) & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

Puntaje:Planteo

- Uso de los valores de los coeficientes. (0,1 pts.)
- Escribir $f(t)$ usando funciones de Heaviside
(Otra notación para $H(t-a)$ es $H_a(t)$). (0,3 pts.)

Cálculo de transformada

- Interpretación de “partir del reposo”. (0,1 pts.)
- Usa linealidad de la transformada correctamente en todo el desarrollo. (0,3 pts.)
- Usa correctamente la fórmula para la transformada de $H(t-a)f(t-a)$. (0,3 pts.)
- Aplica identidades trigonométricas de ser necesario. (0,2 pts.)
- Obtiene la transformada de x (16). (0,1 pts.)

Cálculo de transformada inversa

- Cálculo de fracciones parciales y obtención de (17). (0,2 pts.)
- Invertir correctamente las transformadas de seno. (0,2 pts.)
- Invertir correctamente la transformada de $H(t-a)f(t-a)$. (0,3 pts.)
- Aplica identidades trigonométricas de ser necesario. (0,2 pts.)
- Obtiene la traslación $x(t)$ (19). (0,2 pts.)

(b) Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

I. (0,3 pts) Muestre que $AB = BA$.

Solución: Sólo hay que chequear.

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Puntaje:

- Realiza cada multiplicación. (0,3 pts.)

II. (0,8 pts) Muestre que $A-B$ es diagonalizable y que $B^2 = O_{3 \times 3}$, la matriz nula de 3×3 .

Solución:

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de $A - B$ es

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 & 2 \\ 0 & -2 - \lambda & -2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)[(-2 - \lambda)(1 - \lambda) + 2] \\ = -(1 + \lambda)(\lambda^2 + \lambda) = -(1 + \lambda)^2 \lambda.$$

Los valores propios de $A - B$ son $\lambda = -1$ y $\lambda = 0$, con multiplicidades algebraicas 2 y 1 respectivamente.

De lo anterior, la matriz $A - B$ es diagonalizable ssi la dimensión de $\ker(A - B + I)$ es igual a 2.

$$A - B + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $A - B + I$ tiene rango 1. Una consecuencia del teorema núcleo-imagen dice que la dimensión de $\ker(A - B + I)$ es igual a 2, y por lo tanto $A - B$ es diagonalizable.

Por otro lado:

$$B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- Calcula polinomio característico de $A - B$. (0,2 pts.)
- Encuentra los dos valores propios de $A - B$. (0,1 pts.)
- Comprueba, de alguna manera, que la multiplicidad geométrica del valor propio repetido es 2, y concluye que $A - B$ es diagonalizable. (0,4 pts.)
- Calcula B^2 correctamente. (0,1 pts.)

III. (2,4 pts) Calcule e^{tA} .

[INDICACIÓN: Puede escribir $A = (A - B) + B$, y usar que $e^{t(M+N)} = e^{tM}e^{tN}$ siempre y cuando $MN = NM$.]

Solución: Seguimos la indicación. Escribimos $A = (A - B) + B$.

Chequeamos que $(A - B)$ y B conmutan.

$$(A - B)B = AB - B^2 \\ B(A - B) = BA - B^2 = AB - B^2.$$

Entonces $e^{tA} = e^{t((A-B)+B)} = e^{t(A-B)}e^{tB}$. Para calcular $e^{t(A-B)}$ diagonalizamos $A - B$.

Calculamos los espacios propios para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$ respectivamente.

$$\begin{aligned} A - B - 0 \cdot I &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (A - B)v &= 0 \implies \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\implies v_2 = -v_3 \wedge v_1 = v_2 + 2v_3 \\ &\implies v \in \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B - (-1)I &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (A - B + I)v &= 0 \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\implies v_2 = -2v_3 \wedge v_1 = v_1 \\ &\implies v \in \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

Entonces, una posible diagonalización es

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ e^{t(A-B)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 1 - e^{-t} & 2(1 - e^{-t}) \\ 0 & 2e^{-t} - 1 & 2(e^{-t} - 1) \\ 0 & 1 - e^{-t} & 2 - e^{-t} \end{bmatrix} \quad (21)$$

El cálculo de e^{tB} lo hacemos por definición. Notamos primero que $B^3 = B^2B =$

$O_{3 \times 3}$ y, en general, $B^k = O_{3 \times 3}$ para todo $k \geq 2$.

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k = I + tB = \begin{bmatrix} 1-2t & 0 & 2t \\ 4t & 1 & -4t \\ -2t & 0 & 1+2t \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Finalmente, usando (21) y (22), tenemos

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t(A-B)} e^{tB} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 1-e^{-t} & 2(1-e^{-t}) \\ 0 & 2e^{-t}-1 & 2(e^{-t}-1) \\ 0 & 1-e^{-t} & 2-e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2t & 0 & 2t \\ 4t & 1 & -4t \\ -2t & 0 & 1+2t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}(1-2t) & 1-e^{-t} & 2e^{-t}(t-1)+2 \\ 4te^{-t} & 2e^{-t}-1 & 2e^{-t}(1-2t)-2 \\ -2te^{-t} & 1-e^{-t} & e^{-t}(2t-1)+2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

Puntaje:

- Chequear condición de conmutatividad para aplicar la indicación. (0,1 pts.)
- Encontrar una diagonalización de $A - B$. (0,7 pts.)
- Calcular la exponencial diagonalizada de $t(A - B)$ (20). (0,4 pts.)
- Explicar que todas las potencias mayores que 2 de B son nulas. (0,2 pts.)
- Calcular la exponencial de tB por definición. (0,6 pts.)
- Expresar la exponencial de tA como la multiplicación de (20) con (22), ó de (21) con (22). (0,3 pts.)
- Desarrollar. (0,1 pts.)