

[P1] a) $2yy'' = (y')^2 + 1, x \in I, x \mapsto y(x) > 0 \forall x \in I.$

(a.1) $p = y' \xRightarrow{(R-C)} y'' = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p, \text{ with } p > 0$ (0,4) pts.

$2yy'' = (y')^2 + 1 \Leftrightarrow 2y \frac{dp}{dy} \cdot p = p^2 + 1$ (0,1) pts.
(2)

a.2) (2) Es una EDO

A VARIABLES SEPARABLES EN p con variable indep y . Ningún término en la ODE de (2) es $= 0$, with separando variables e integrando:

$\int \frac{2p}{p^2+1} dp = \int \frac{dy}{y} + C \Rightarrow \ln(p^2+1) = \ln(yA)$ (0,2) pts

$\Rightarrow y' = p = \pm \sqrt{Ay-1}$ (0,3) pts. (0,2) pts.
 OTRA EDO VAR SEPARABLES!

$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{Ay-1}} = \int dx + B \Rightarrow \frac{2}{A} \sqrt{Ay-1} = x+B, B \in \mathbb{R}$ (0,3) pts (0,5) pts

$\Rightarrow x \mapsto y(x) = \frac{1}{A} \left\{ \left(\frac{Ax}{2} + C \right)^2 + 1 \right\}, C \in \mathbb{R}$
($C = \frac{AB}{2}$)

definir en (solu)

$\{ x \in I : y(x) > 1/A \}$ como solución.
 $x+B > 0$

(0,5) pts.

b) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln(2x), \quad x > 0.$

Sol - 1º problema homogéneo $y'' + 2y' + y = 0$, con $y = e^{rx}$

$\Rightarrow P(r) = (r^2 + 2r + 1) = (r+1)^2 \Rightarrow P(r) = 0 \Leftrightarrow r = -1$ (0,2 pts)
 raíz mult = 2
 polin. característico $\Rightarrow \{e^{-x}, xe^{-x}\}$ es BASE espacio solución homogéneo. $\Rightarrow y_H = A\bar{e}^{-x} + Bxe^{-x}$ (0,2 pts)
 $A, B \in \mathbb{R}$

→ Soluc particular: Variación de parámetros.

$y_P(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \quad y_1 = \bar{e}^{-x}, y_2 = xe^{-x}$

Calculamos $W(\bar{e}^{-x}, xe^{-x}) = \begin{vmatrix} \bar{e}^{-x} & xe^{-x} \\ -\bar{e}^{-x} & \bar{e}^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = \bar{e}^{-2x} \neq 0$ (0,5 pts)
 $\forall x \in \mathbb{R}$ met $x > 0$

$C_1(x) = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \bar{e}^{-x} \ln(2x) & \bar{e}^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = \bar{e}^{2x} \cdot x \bar{e}^{-2x} \ln(2x) = x \ln(2x) \cdot \bar{e}^{-x} //$ (0,5 pts)

$C_2(x) = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} \bar{e}^{-x} & 0 \\ -\bar{e}^{-x} & \bar{e}^{-x} \ln(2x) \end{vmatrix} = \bar{e}^{2x} \cdot \bar{e}^{-2x} \ln(2x) = \ln(2x) //$ (0,5 pts)
 Calculamos $C_1(x)$ y $C_2(x)$

$C_2(x) = \int \ln(2x) dx = x \ln(2x) - x$ (0,5 pts) → recursión!

$C_1(x) = \int x \ln(2x) dx = \frac{x^2}{2} (\ln(2x) - 1) - \int x \ln(2x) dx + \frac{x^2}{2}$ (0,5 pts)
 IPP $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \ln(2x) dx \\ \rightarrow v = x \ln(2x) - x \end{cases}$
 $\Rightarrow \int x \ln(2x) dx = \frac{x^2}{2} (\ln(2x) - 1)$ (0,3 pts)

$\Rightarrow y_P(x) = x(\ln(2x) - 1)\bar{e}^{-x} + \frac{x^3}{2}(\ln(2x) - 1)\bar{e}^{-x}$ (0,5 pts)
 Soluc genl $y(x) = A\bar{e}^{-x} + Bxe^{-x} + x(\ln(2x) - 1)\bar{e}^{-x} + \frac{x^3}{2}\bar{e}^{-x}(\ln(2x) - 1), x > 0$

[P2] a) $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, $\{a(x)+b(x)+c(x)=0 \forall x \in I\}$
 (0,2) pts fms continuas.

$y = e^x$ será solución si $a(x)e^x + b(x)e^x + c(x)e^x = 0 \forall x \in I$
 pues $y = y' = y'' = e^x$
 $\underbrace{e^x}_{\neq 0} (a(x)+b(x)+c(x)) = 0 \forall x \in I$
 $= 0$ por hipótesis

$\Rightarrow y = e^x$ es solución en tal caso def en I (0,5) pts
 (0,3) pts

b) $2xy'' + (1-4x)y' + (2x-1)y = e^x, x > 0$ (0,5) pts

b.1) $a(x)=2x, b(x)=1-4x, c(x)=2x-1, x > 0$ se tiene que
 $a(x)+b(x)+c(x) = 2x+1-4x+2x-1 = 0 \forall x > 0 \Rightarrow$ se cumple hipótesis a) $\Rightarrow y_1 = e^x$ es solución de la homogénea.

b.2) Para completar la base del espacio homogéneo tenemos 2 maneras:

$\rightarrow$ (Reducción de orden) 1º: $y'' + \frac{1-4x}{2x}y' + \frac{2x-1}{2x}y = 0$ $x > 0$ NORMALIZADA
 $y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p} dx$, $e^{-\int \frac{1-4x}{2x} dx} = e^{-(\frac{1}{2}\ln|x| - 2x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2x}$ (0,5) pts

$\Rightarrow e^x \int \frac{1}{e^{2x}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2x} dx = e^x \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2e^x \sqrt{x}, x > 0$ (0,5 pts)
 $\Rightarrow y_2 \in \langle \sqrt{x} e^x \rangle$ (0,3) pts

$\Rightarrow \{y_1, y_2\} = \{e^x, \sqrt{x}e^x\}$ BASE $\Rightarrow y_H(x) = Ae^x + B\sqrt{x}e^x$
soluc. gen. homogénea

→ (Fórmula ABEL)

$w(e^x, y_2) = C e^{-\int \frac{1-4x}{2x} dx} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} e^x & y_2 \\ e^x & y_2' \end{vmatrix} = \frac{C}{\sqrt{x}} e^{2x}$

y_2 que completa la base comp. $\rightarrow$ (0,2) pts

$y_2' - y_2 = \frac{C}{\sqrt{x}} e^x$ EDO lineal
1^{er} orden
usar y_2 .

(F.I) $\rightarrow \phi(x) = e^{-x}$, $u \in \mathbb{R}$
(0,2) pts

$y_2 = e^x \left\{ C \int \frac{e^{-x} \cdot e^x}{\sqrt{x}} dx + D \right\}$ D en $\mathbb{R}$
(0,2) pts

$\Rightarrow y_2 = e^x \left\{ \frac{C}{2} \sqrt{x} + D \right\} \Rightarrow D = 0$
mer que y_2 sea l.i con $y_1 = e^x$
(0,2) pts

$\Rightarrow$ NUEVAMENTE $\{y_1, y_2\} = \{e^x, \sqrt{x}e^x\}$ es BASE DE la parte homogénea

$\Rightarrow y_H(x) = Ae^x + B\sqrt{x}e^x$
 $A, B \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ (0,2) pts

b.3) $y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, $y_1 = e^x$, $y_2 = \sqrt{x}e^x$ $\leftarrow$ variación de constantes
(0,5 pts)

$w(e^x, \sqrt{x}e^x) = \begin{vmatrix} e^x & e^x\sqrt{x} \\ e^x & e^x\sqrt{x} + e^x/2\sqrt{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} \neq 0 \quad \forall x > 0$

$$C_1 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ e^x & \frac{e^x}{2x} \end{vmatrix} = \frac{2\sqrt{x}}{e^{2x}} \begin{vmatrix} 0 & e^x \sqrt{x} \\ \frac{e^x}{2x} & e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} \end{vmatrix} = -1 //$$

$C_1 = -x$ (0,5) pts

$$C_2 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1 & \frac{e^x}{2x} \end{vmatrix} = \frac{2\sqrt{x}}{e^{2x}} \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{2x} \end{vmatrix} = (\sqrt{x})^{-1} //$$

$C_2 = 2\sqrt{x}$ (0,5) pts

$$\Rightarrow y_p(x) = -x e^x + \sqrt{x} e^x \cdot 2\sqrt{x} = x e^x //$$

(0,4) pts

Logo a solução geral de la EDO es (0,1) pts

$x \mapsto y(x) = A e^x + B \sqrt{x} e^x + x e^x$, o coeficiente $A, B \in \mathbb{R}$

b.4) Compramos $y_p' = e^x + x e^x$, $y_p'' = e^x + e^x + x e^x = 2e^x + x e^x$

$$\Rightarrow 2x(2e^x + x e^x) + (1-4x)(e^x + x e^x) + (2x-1)x e^x$$

$$= e^x \{ \underbrace{2x(2+x) + (1-4x)(1+x) + (2x-1)x}_{=1} \}$$

$$\underbrace{4x + 2x^2 + 1 + x - 4x - 4x^2 + 2x^2 - x}_{=1} //$$

(1) pts

[P3] $\underbrace{p = k\varphi^2}_{(*)}, \underbrace{p' = -g\varphi}_{(*,*)}, \underbrace{r^2 g = 4\pi G \int_0^r \tilde{\sigma} \varphi(s) ds}_{(*,*,*)}$

6

a) De $(*) \Rightarrow \overbrace{p' = 2k\varphi\varphi'}^{(0,1) \text{ pts}}, \text{ por } (*,*) \Rightarrow -g\varphi = 2k\varphi\varphi' \Leftrightarrow \overbrace{-g = 2k\varphi}^{p>0}$

$\Rightarrow r^2 g = -2k\varphi' \cdot r^2 \Rightarrow \text{en } (*,*,*) \xrightarrow{(0,2) \text{ pts}}$

$\Rightarrow -2k\varphi' \cdot r^2 = 4\pi G \int_0^r \tilde{\sigma} \varphi(s) ds \xrightarrow{(TFC)} \overbrace{(-2k)(2r\varphi' + r^2\varphi'')}^{(0,1,5) \text{ pts}} = 4\pi G r^2 \varphi$

$\Leftrightarrow \overbrace{(-2k)(2\varphi' + r\varphi'')}^{r>0} = \overbrace{4\pi G \varphi}^{2}$ $\leftarrow \text{De acá reordenando}$

$\Rightarrow \boxed{r\varphi'' + 2\varphi' + \frac{2\pi G}{k} r\varphi = 0}$ $\xrightarrow{\alpha^2 = \frac{2\pi G}{k} \checkmark}$

b) Sea $u = r\varphi \Rightarrow \underbrace{\dot{u} = \varphi + r\varphi'}_{(0,2) \text{ pts}} \Rightarrow \ddot{u} = \varphi' + \varphi' + r\varphi'' = 2\varphi' + r\varphi''$

luego $\underbrace{r\varphi'' + 2\varphi'}_{= \ddot{u}} + \underbrace{\alpha^2 r\varphi}_{= u} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{u} + \alpha^2 u = 0}$ $\xrightarrow{(0,1,5) \text{ pts}}$

c) Como $\alpha^2 > 0, u = e^{\lambda r} \Rightarrow \overbrace{P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2}^{(0,1,5) \text{ pts}} \Rightarrow P(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\alpha \Rightarrow \{ \cos(r\alpha), \sin(r\alpha) \}$ $\leftarrow \text{es la base del espacio solución}$

$\Rightarrow \boxed{u(r) = A \cos(r\alpha) + B \sin(r\alpha)} \leftarrow (0,1,5) \text{ pts}$

d) Como $u = r\varphi$

$$\Rightarrow p(r) = A \frac{\cos(r\alpha)}{r} + B \frac{\sin(r\alpha)}{r}$$

Como $p(0) > 0$ (dato) y $p(r) < \infty$ si $r \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} p(r) = A \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\cos(r\alpha)}{r} + B \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r\alpha)}{r}$$

$= p(0) < \infty$ (0.5) pts (0.2) pts $= \alpha \leftarrow$ límite enológico.

$\Rightarrow$ NECESARIA/.

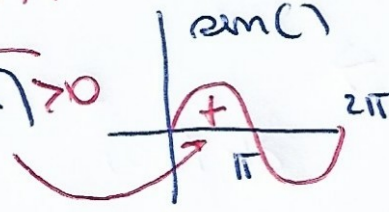
$$\boxed{A=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = p(0)/\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(r) = \frac{p(0) \sin(\alpha r)}{\alpha r}} \quad \text{--- (0.3) pts}$$

e) Como $p(r) > 0$

y $\frac{p(0)}{\alpha r} > 0 \Rightarrow \sin(\alpha r) > 0$ (0.3) pts



$$\Rightarrow \alpha r < \pi$$

(0.2) pts

$$\Rightarrow \boxed{r < \pi/\alpha} \quad \leftarrow (0.3) \text{ pts}$$

$$\Rightarrow \text{TAMAÑO MÁXIMO } \boxed{r = \pi/\alpha}$$