

P1

$$x^2 y'' - 7xy' + 16y = x^4 \ln x, \quad x > 0. \quad (6 \text{ puntos})$$

(1,5 puntos) Atención: si no justifican con la solución polinómica no vale el puntaje

(a) Ecuación homogénea (H) $x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$.

$$y(x) = x^m \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = mx^{m-1} \\ y''(x) = m(m-1)x^{m-2} \end{cases}$$

$$\leadsto x^2 m(m-1)x^{m-2} - 7x mx^{m-1} + 16y = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^m}_{>0} \{ \underbrace{m(m-1) - 7m + 16}_{=0} \} = 0 \quad (1,0)$$

$$(m-4)^2 = m^2 - 8m + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow m=4 \therefore y(x) = x^4 \text{ es una solución de (H). } (0,5)$$

(3,5 puntos)

(b) Reducción de orden: Busquemos una solución en

la forma $y = x^4 u$, con u función no constante a determinar. (1,0)

$$\begin{cases} y' = 4x^3 u + x^4 u' \\ y'' = 12x^2 u + 8x^3 u' + x^4 u'' \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación,

$$x^2 \{ \cancel{12x^2 u} + 8x^3 u' + x^4 u'' \} - 7x \{ \cancel{4x^3 u} + x^4 u' \} + \cancel{16x^4 u} = x^4 \ln x$$

$$\Leftrightarrow x^6 u'' + 8x^5 u' - 7x^5 u' = x^4 \ln x$$

$$\Leftrightarrow x^6 u'' + x^5 u' = x^4 \ln x, \quad x > 0 \quad (1,0)$$

$$\div x^5, z = u' \rightarrow xz' + z = \frac{x^4 \ln x}{x^5}, \quad x > 0$$

$$\Rightarrow (xz)' = xz' + z = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0$$

Una vez que $\frac{\ln x}{x}$ tiene primitiva dada por funciones elementales, integramos directamente vía integral indefinida:

$$xz = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{(\ln x)^2}{2x} + \frac{C}{x} \quad (0,5)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{u=z} \Rightarrow u(x) &= \int \left\{ \frac{(\ln x)^2}{2x} + \frac{C}{x} \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (\ln x)^2 d(\ln x) + C \ln x + \tilde{C} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} (\ln x)^3 + C \ln x + \tilde{C} \quad (0,5)$$

$$\textcircled{y=x^4 u}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{\frac{x^4 (\ln x)^3}{6}}_{\text{esta es la solución particular de la no homogénea}} + \underbrace{C x^4 \ln x}_{\text{esta es la segunda solución de la ecuación (H)}} + \underbrace{\tilde{C} x^4}_{\text{esta es la solución encontrada de (H)}} \quad (0,5)$$

esta es la
solución particular
de la no homogénea

esta
es la
segunda solución
de la ecuación (H)

esta es
la solución
encontrada
de (H)

(1 punto)

$$(c) \begin{cases} y_1(x) = x^4 \\ y_2(x) = x^4 \ln x \end{cases}$$

son soluciones L.I. en $(0, +\infty)$ de (H).

- y_1 ya hemos visto que es solución de (H) de (1).
- Veamos que y_2 es solución de (H).

$$\begin{cases} y_2'(x) = 4x^3 \ln x + x^3 \\ y_2''(x) = 12x^2 \ln x + 4x^2 + 3x^2 \end{cases}$$
$$x^2 y_2'' - 7x y_2' + 16y_2 = 12x^4 \ln x + 7x^4 - 7x \{4x^3 \ln x + x^3\} + 16x^4 \ln x$$
$$= (12 - 28 + 16)x^4 \ln x + 7x^4 - 7x^4 = 0 \quad (0,5)$$

- Resta comprobar que y_1, y_2 son L.I. en $(0, +\infty)$:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^4 & x^4 \ln x \\ 4x^3 & 4x^3 \ln x + x^3 \end{vmatrix}$$
$$= x^7 (\cancel{4\ln x} + 1 - \cancel{4\ln x}) = x^7 > 0, \forall x > 0. \quad (0,5)$$

Por lo tanto,

$$y(x) = C_1 x^4 + C_2 x^4 \ln x + \frac{x^4}{6} (\ln x)^3, \quad x > 0,$$

$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},$

entrega la solución general de la ecuación dada.

(a) $y''' - 2y'' + 2y' = e^x$ (6 puntos)

• Solución de la homogénea asociada: $y''' - 2y'' + 2y' = 0$ (H)

Como la ecuación es lineal con coeficientes constantes, sabemos que sus soluciones se construyen vía exponenciales:

$y = e^{\lambda x} \leadsto e^{\lambda x} (\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda) = 0$

$\therefore \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

Entonces, de lo que hemos visto en clase, la solución general de (H) es dada por:

$y_h(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ (1,0)

• Solución particular vía coeficientes indeterminados:

$y_p(x) = A e^x$ (1,0)

$\begin{cases} y_p'(x) = A e^x \\ y_p''(x) = A e^x \end{cases} \leadsto y''' - 2y'' + 2y' = e^x$
 $(A - 2A + 2A)e^x = e^x$
 $\Rightarrow \boxed{A=1}$ (0,5)

$\Rightarrow y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + e^x$ (1,0)

atención: si no explicitas la exponencial al comienzo no ganas el punto.

- PVI: Buscamos la única solución que pasa por el punto $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

$$1 = y(0) = C_1 + 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow y(x) = C_2 e^x \sin x + e^x$$

$$\Rightarrow y'(x) = C_2 e^x \sin x - C_2 e^x \cos x + e^x$$

$$0 = y'(0) = -C_2 + 1 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1} \quad (0,5)$$

① La única solución del PVI es dada por:

$$y(x) = e^x \sin x + e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (0,5)$$

(b) $x^2 y'' + 7xy' + 10y = 13 \cos(\ln x)$, $x > 0$. (6 puntos)

Para usar el método de coeficientes indeterminados, debemos transformar la ecuación de Cauchy-Euler arriba en una ecuación a coeficientes constantes. Para ello, introducimos el cambio de variables:

$$t = \ln x \Rightarrow x = e^t$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' e^t = y' x \Rightarrow \dot{y} = y' x & (1) \\ \ddot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{y}) = \frac{d}{dt}(y' x) \frac{dx}{dt} = (y'' x + y') x = x^2 y'' + xy' & (2) \end{cases}$$

→ es una migración exponencial

$$\Rightarrow \boxed{x^2 y''} + 7 \boxed{xy'} + 10y = 13 \cos(\ln x), \quad x > 0, \quad y = y(x)$$

atención: no gana el punto si no explicita el cambio exponencial

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + 6\dot{y} + 10y = 13 \cos(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y = y(t) \quad (1,0)$$

• Homogénea asociada: $(H) \ddot{y} + 6\dot{y} + 10y = 0$

$$y(H) = e^{\lambda t} \Rightarrow \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} (\underbrace{\lambda^2 + 6\lambda + 10}_{=0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$$

$$\Rightarrow y_h(t) = C_1 e^{-3t} \cos(t) + C_2 e^{-3t} \sin(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (1,0)$$

• No homogénea: $y_p(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$, $A, B \in \mathbb{R}$ a determinar (1,0)

$$\begin{cases} \dot{y}_p = -A \sin(t) + B \cos(t) \\ \ddot{y}_p = -A \cos(t) - B \sin(t) \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación no homogénea

$$-A \cos(t) - B \sin(t) - 6A \cos(t) + 6B \sin(t) + 10A \cos(t) + 10B \sin(t) = 13 \cos(t)$$

$$(9A + 6B) \cos(t) + (9B - 6A) \sin(t) = 13 \cos(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9A + 6B = 13 \\ 9B - 6A = 0 \end{cases} \Rightarrow 6A = 9B \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{2}B} \quad (0,5)$$

De $9 \cdot \frac{3}{2}B + 6B = 13$ tenemos:

$$\frac{27 + 12B}{2} = 13 \Leftrightarrow \frac{39}{13}B = 2 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 1} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \cos(t) + \frac{2}{3} \sin(t).$$

Por lo tanto, la solución general ent es dada por:

$$y(t) = C_1 e^{-3t} \cos(t) + C_2 e^{-3t} \sin(t) + \cos(t) + \frac{2}{3} \sin(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1,0)$$

Volviendo a $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$, tenemos:

$$y(x) = C_1 x^{-3} \cos(\ln x) + C_2 x^{-3} \sin(\ln x) + \cos(\ln x) + \frac{2}{3} \sin(\ln x), \quad x > 0, \\ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (0,5)$$

• PVI:

Conviene encontrar C_1, C_2 que satisfacen $y(e) = 1, y'(e) = 0$,

lo que viene de reemplazar las expresiones correspondientes en $y(x)$ y $y'(x)$. (0,5)

→ O sea, debido a la dificultad adicional exigida en el ítem (b) no se exigirá las expresiones de C_1, C_2 .

P3 (a)-(c)

(a) $y^{(4)} - y = e^x$ (3 puntos)

• Homogénea asociada: $y^{(4)} - y = 0$

Si $y(x) = e^{\lambda x} \leadsto e^{\lambda x} (\lambda^4 - 1) = 0$, y por lo tanto,

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) = \underbrace{(\lambda^2 + 1)}_{\lambda = \pm i} \underbrace{(\lambda - 1)}_{\lambda = 1} \underbrace{(\lambda + 1)}_{\lambda = -1}$$

y por lo tanto,

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.0)$$

• No homogénea: (coeficientes indeterminados)

Buscamos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = A x e^x, \text{ con } A \in \mathbb{R} \text{ a encontrar.} \quad (1.0)$$

$$y_p'(x) = A x e^x + A e^x = A e^x (x+1)$$

$$y_p''(x) = A e^x (x+1) + A e^x = A e^x (x+2)$$

$$y_p'''(x) = A e^x (x+2) + A e^x = A e^x (x+3)$$

$$y_p^{(4)}(x) = A e^x (x+3) + A e^x = A e^x (x+4)$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$A e^x (x+4) - A x e^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow \cancel{A}xe^x + 4Ae^x - \cancel{A}xe^x = e^x \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{4}xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la solución general es dada por:

$$y(x) = \frac{1}{4}xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (0,5)$$

$$(b) \begin{cases} y'' + 2y' + (\sigma^2 + 1)y = 0 \\ y(0) = y(5) = 0 \end{cases} \quad | \quad y' = \frac{dy}{dt} \quad (3 \text{ puntos})$$

Debemos encontrar (y, σ) con $y \neq 0, \sigma > 0$ que resuelva el P.V.F.

$$y(t) = e^{\lambda t} \sim \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda^2 + 2\lambda + \sigma^2 + 1)}_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + (\sigma^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1(\sigma^2 + 1)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-\sigma^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sigma i$$

Observe que si $\sigma=0$, entonces la solución general es

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t},$$

y de $y(0)=0$ viene $C_1=0$, luego $y(t)=C_2 t e^{-t}$,
mientras que de $y(5)=0$ tenemos $0 = C_2 5e^{-5} \Rightarrow C_2=0$
Por lo tanto $y \equiv 0$, luego $\sigma=0$ no sirve.

Como $\sigma > 0$, luego

$$y(t) = C_1 e^{-t} \cos(\sigma t) + C_2 e^{-t} \sin(\sigma t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1,0)$$

De $y(0)=0$ viene $C_1=0$, luego $(0,5)$

$$y(t) = C_2 e^{-t} \sin(\sigma t),$$

y de $y(5)=0$ tenemos $0 = C_2 e^{-5} \sin(5\sigma)$, y como
queremos $C_2 \neq 0$, nos resta $\sin(5\sigma)=0$, o sea, $(0,5)$

$$5\sigma = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sigma = \frac{k\pi}{5}}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{recordar que } \sigma > 0) \quad (0,5)$$

Las soluciones dadas por

$$\begin{cases} y_k(t) = C e^{-t} \sin\left(\frac{k\pi}{5}t\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad C \neq 0 \\ \sigma_k = \frac{k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (0,5)$$

$$(C) \begin{cases} r^2 u'' + 2ru' = 0 \\ u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1 \end{cases}$$

~ ecuación de Cauchy-Euler.

$$, u' = \frac{du}{dr} \quad (3 \text{ puntos})$$

$$u(r) = r^m \leadsto r^2 m(m-1)r^{m-2} + 2r(m)r^{m-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{r^m}_{>0} \{m(m-1) + 2m\} = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-1) + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m+1) = m^2 + m = 0 \Rightarrow m=0, m=-1$$

$$\Rightarrow u(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}, \quad r \in [a, b]. \quad (1,5)$$

De $u(a) = u_0$, $u(b) = u_1$ encontramos (C_1, C_2) :

$$\begin{cases} u_0 = u(a) = C_1 + \frac{C_2}{a} \Rightarrow \boxed{C_1 = u_0 - \frac{C_2}{a}} \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = u(b) = C_1 + \frac{C_2}{b} \quad (2) \end{cases}$$

Reemplazando (1) en (2):

$$u_1 = u_0 - \frac{C_2}{a} + \frac{C_2}{b} \Leftrightarrow u_1 - u_0 = C_2 \frac{a-b}{ab} \Leftrightarrow \boxed{C_2 = \frac{u_1 - u_0}{a-b} ab} \quad (0.5) //$$

Volviendo a (1),

$$C_1 = u_0 - \frac{1}{a} \frac{u_1 - u_0}{a-b} ab = \frac{u_0(a-b) - u_1 b + u_0 b}{a-b}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{u_0 a - u_0 b - u_1 b + u_0 b}{a-b} = \boxed{\frac{u_0 a - u_1 b}{a-b}} \quad (0,5)$$

Por lo tanto, encontramos

$$u(r) = \frac{u_0 a - u_1 b}{a-b} + \frac{1}{r} \frac{u_1 - u_0}{a-b} ab, \quad \forall r \in (a, b). \quad (0,5)$$

P3 (d)

(d) $y'' - y = \frac{1}{x}$. Consideremos $x > 0$ por ejemplo. (3 puntos)

• Homogénea asociada: $y'' - y = 0$

$$y(x) = e^{\lambda x} \leadsto \lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} (\lambda^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (0,5)$$

• No homogénea: Método 1: Variación de parámetros. (2,5 pts total)

Buscamos:

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2, \text{ con } u_1, u_2 \text{ a determinar vía } \begin{cases} u_1' = -\frac{g y_2}{W} \\ u_2' = \frac{g y_1}{W} \end{cases}$$

Una vez que la ecuación está normalizada, consideramos:

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Calculamos el Wronskiano:

$$W(u) = W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 //$$

luego,

$$\bullet \ u_1' = -\frac{g y_2}{W} = \frac{e^{-x}}{2x} \xrightarrow{\text{TFC}} u_1(x) = u_1(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^{-s}}{s} ds \quad (1,0)$$

$$\bullet \ u_2' = \frac{g y_1}{W} = -\frac{e^x}{2x} \xrightarrow{\text{TFC}} u_2(x) = u_2(x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^s}{s} ds \quad (1,0)$$

para algún punto $x_0 > 0$. Denote:

$$f(x) := \int_{x_0}^x \frac{e^s}{s} ds, \quad \forall x > 0.$$

luego,

$$y(x) = e^x u_1(x) + e^{-x} u_2(x) = \underbrace{e^x u_1(x_0) + e^{-x} u_2(x_0)}_{\in y_h} + \underbrace{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}_{y_p} f(x).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es dada por:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} f(x), \quad \forall x > 0, \quad (0,5)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

• No homogénea: Método 2: Reducción de orden (2,5 puntos del 20)

Buscamos $y(x) = u e^x$, con u función (no constante) a determinar.

$$\begin{cases} y'(x) = u' e^x + u e^x \\ y''(x) = u'' e^x + 2u' e^x + u e^x \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación $y'' - y = \frac{1}{x}$ viene:

$$u'' e^x + 2u' e^x + \cancel{u e^x} - \cancel{u e^x} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow e^x (u'' + 2u') = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow u'' + 2u' = \frac{e^{-x}}{x}, \quad x > 0.$$

(1,0)

Sea $z = u'$, luego

$$z' + 2z = \frac{e^{-x}}{x}$$

F.I.: e^{2x} , luego

$$(ze^{2x})' = e^{2x}(z' + 2z) = \frac{e^{2x}e^{-x}}{x} = \frac{e^x}{x}$$

TFE $\Rightarrow ze^{2x} = z(x_0)e^{2x_0} + \int_{x_0}^x \frac{e^s}{s} ds$, para algun $x_0 > 0$.

$\Rightarrow z(x) = C_0 e^{-2x} + e^{-2x} f(x)$, donde $f(x) := \int_{x_0}^x \frac{e^s}{s} ds$ (0,5)

y $C_0 := z(x_0)e^{2x_0}$.

$\Rightarrow u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x z(t) dt = u(x_0) + \int_{x_0}^x \{C_0 e^{-2t} + e^{-2t} f(t)\} dt$

TFE $\boxed{z=u'}$ $= u(x_0) + C_0 e^{-2x} - C_0 e^{-2x_0} + \int_{x_0}^x e^{-2t} f(t) dt$ (0,5)

$\Rightarrow \boxed{y=ue^x}$ $y(x) = \underbrace{\tilde{C}_0 e^x + C_0 e^{-x}}_{\in y_h} + \underbrace{\int_{x_0}^x e^{-2t} f(t) dt}_{y_p}$, $\tilde{C}_0 = u(x_0) - C_0 e^{-2x_0}$.

Por lo tanto, tenemos la solución general dada por:

$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \int_{x_0}^x e^{-2t} f(t) dt$. (0,5)