Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2025-1, Coordinado.
Miércoles 7 de Mayo. Profesores: Sa. Martínez, F. Ortega, A. Osses

PAUTA CONTROL 2

P1. a) (3 pts) Considere la EDO

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}.$$

I) (1 pts) Encuentre la solución de la ecuación homogénea asociada.

Solución

La solución homogénea es la solución de la EDO homogénea asociada

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Es una EDO a coeficientes constantes, lineal.
El polinomio característico de la EDO es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \quad \leftarrow \text{[0 pts]}$$

+0.3 ptos

Sus raíces son

0.1 pts

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{4-5}}{2} = 2 \pm i \quad \leftarrow \text{[pts]}$$

Las raíces de $p(\lambda)$ son complejas conjugadas, luego las funciones linealmente independientes que son soluciones de la EDO homogénea son

$$y_{h_1}(x) = e^{2x}\cos(x) \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$
$$y_{h_2}(x) = e^{2x}\sin(x) \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

Y la solución homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{2x}\cos(x) + c_2 e^{2x}\sin(x) \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

C1,C2 en R -> +0.1 pts

II) (1 pts) Encuentre la solución particular de la ecuación.

Solución

La solución particular se puede encontrar por lo menos de dos formas: usando la fórmula de variación de parámetros y usando coeficientes indeterminados.
Forma 1: Variación de parámetros

$$y_p = \nu_1(x)\, y_{h_1}(x) + \nu_2(x)\, y_{h_2}(x) \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

De la fórmula de variación de obtiene que

$$\nu_1(x) = -\int \frac{\overline{Q}(x)\, y_{h_2}(x)}{W(y_{h_1}, y_{h_2})}\, dx \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$
$$\nu_2(x) = \int \frac{\overline{Q}(x)\, y_{h_1}(x)}{W(y_{h_1}, y_{h_2})}\, dx \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

Como la EDO está normalizada, $\overline{Q} = 2e^{2x}$. Además

$$y_{h_1}(x) = e^{2x}\cos(x) \quad ; \quad y_{h_2}(x) = e^{2x}\sin(x)$$

Luego el Wronskiano queda

$$W(y_{h_1}, y_{h_2}) = \begin{vmatrix} y_{h_1} & y_{h_2} \\ y'_{h_1} & y'_{h_2} \end{vmatrix} = y_{h_1} y'_{h_2} - y'_{h_1} y_{h_2} \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

$$y'_{h_1} = \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\cos(x)\right) = 2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\sin(x)$$
$$y'_{h_2} = \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\sin(x)\right) = 2e^{2x}\sin(x) + e^{2x}\cos(x)$$

$$\begin{aligned} W(x) &= e^{2x}\cos(x)\cdot e^{2x}\left(2\sin(x) + \cos(x)\right) \\ &\quad - e^{2x}\sin(x)\cdot e^{2x}\left(2\cos(x) - \sin(x)\right) \\ &= e^{4x}\left[2\cos(x)\sin(x) + \cos^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)\right] \\ &= e^{4x} \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]} \end{aligned}$$

Luego se tiene,

$$\begin{aligned} \nu_1(x) &= -\int \frac{\overline{Q}(x)\, y_{h_2}(x)}{W(y_{h_1}, y_{h_2})}\, dx = -\int \frac{2e^{2x}\cdot e^{2x}\sin(x)}{e^{4x}}\, dx \\ &= -2\int \sin(x)\, dx = 2\cos(x) \quad \leftarrow \text{[0.15 pts]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_2(x) &= \int \frac{\overline{Q}(x)\, y_{h_1}(x)}{W(y_{h_1}, y_{h_2})}\, dx = \int \frac{2e^{2x}\cdot e^{2x}\cos(x)}{e^{4x}}\, dx \\ &= 2\int \cos(x)\, dx = 2\sin(x) \quad \leftarrow \text{[0.15 pts]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p &= \nu_1(x)\, y_{h_1}(x) + \nu_2(x)\, y_{h_2}(x) \\ &= 2\cos(x)\, e^{2x}\cos(x) + 2\sin(x)\, e^{2x}\sin(x) \\ &= 2e^{2x}\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) \\ \Rightarrow y_p &= 2e^{2x} \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]} \end{aligned}$$

Forma 2: Coeficientes indeterminados (ver comentario al final)

El lado derecho de la EDO es: $\overline{Q}(x) = 2e^{2x}$. El operador diferencial que anula el lado derecho es

$$P_1(D) = D - 2 \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}]$$

Luego la EDO original

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}$$

Se puede reescribir como $P(D)y = 2e^{2x}$, donde $P(D) = D^2 - 4D + 5$, es decir

$$(D^2 - 4D + 5)y = 2e^{2x}$$

Si aplicamos $P_1(D)$ a ambos lados, se obtiene:

$$(D-2)(D^2 - 4D + 5)y = (D-2)\, 2e^{2x} = 0$$

Luego se nota que las raíces del polinomio característico del operador $P(D)$ son $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ (ver parte I) y que la raíz del polinomio característico de $P_1(D)$, es decir

$$p_1(\lambda) = \lambda - 2, \quad \text{es } \lambda_3 = 2 \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}]$$

Luego, como las raíces de los polinomios característicos de $P(D)$ y $P_1(D)$ no coinciden, la forma de la solución particular se puede obtener directamente de $\lambda_3 = 2 \quad \leftarrow$ [0.2 pts], con lo que se obtiene

$$y_p = A \cdot e^{2x} \quad \text{con } A \in \mathbb{R} \text{ constante} \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}]$$

Para obtener A, se reemplaza $y_p = A \cdot e^{2x}$ en la EDO no homogénea:

$$y_p'' - 4y_p' + 5y_p = 2e^{2x}$$

$$\text{se tiene} \quad y_p = Ae^{2x} \quad ; \quad y_p' = 2Ae^{2x} \quad ; \quad y_p'' = 4Ae^{2x}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} 4Ae^{2x} - 4 \cdot 2Ae^{2x} + 5Ae^{2x} &= 2e^{2x} \\ \Rightarrow e^{2x}(4A - 8A + 5A - 2) &= 0 \\ \Rightarrow A &= 2 \\ \Rightarrow y_p = 2e^{2x} \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}] \end{aligned}$$

III) (1 pts) Encuentre la solución de la EDO que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Solución

La solución general de la EDO es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x}\cos(x) + C_2 e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x} \quad \leftarrow [0.3 \text{ pts}]$$

La condición inicial: $y(0) = 0$

$$\Rightarrow y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 2 = 0$$
$$\Rightarrow C_1 = -2 \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}]$$

Para $y'(0) = 0$ necesitamos $y'(x)$

$$y'(x) \;=\; C_1 e^{2x}\left[2\cos(x) - \sin(x)\right] + C_2 e^{2x}\left[2\sin(x) + \cos(x)\right] + 4e^{2x} \leftarrow [0.2 \text{ pts}]$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= C_1 \cdot 2 + C_2 + 4 = 0 \\ &\Rightarrow C_2 = -4 - 2C_1 \\ \text{Pero } C_1 = -2 &\Rightarrow C_2 = -4 + 4 = 0 \\ &\Rightarrow C_2 = 0 \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}] \end{aligned}$$

Luego la solución al problema de valor inicial es

$$y(x) = -2e^{2x}\cos(x) + 2e^{2x}$$
$$\Rightarrow y(x) = 2e^{2x}\left[1 - \cos(x)\right] \quad \leftarrow [0.1 \text{ pts}]$$

b) (3 pts) Considere la EDO

$$(D-3)^2(D^2+4)D^2 y = 4e^x$$

I) (1 pts) Encuentre una base del espacio de soluciones de la EDO homogénea asociada, indicando para cada solución de la base encontrada a qué raíz del polinomio característico se asocia.

Solución

Una base del espacio de soluciones se puede obtener en función de las raíces del polinomio característico de la EDO,

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda^2 + 4)\,\lambda^2 \quad \leftarrow [0.1 \text{ pts}]$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad & \lambda_1 = 3 \quad \text{multiplicidad } 2 \quad \leftarrow [0.1 \text{ pts}] \\ & \lambda_{2,3} = \pm 2i \quad \text{multiplicidad } 1 \quad \leftarrow [0.1 \text{ pts}] \\ & \lambda_4 = 0 \quad \text{multiplicidad } 2 \quad \leftarrow [0.1 \text{ pts}] \end{aligned}$$

Luego, una base puede ser formada por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 3 \quad &\Rightarrow \quad e^{3x}, \quad xe^{3x} \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}] \\ \lambda_{2,3} = \pm 2i \quad &\Rightarrow \quad \cos(2x), \quad \sin(2x) \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}] \\ \lambda_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 1, \quad x \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}] \end{aligned}$$

II) (1.5 pts) Muestre que Ae^{2x} es una solución de la EDO no-homogénea para un valor específico de la constante A, e indique dicho valor de A. **Ind:** Aplique el operador diferencial a la función Ae^{2x} para encontrar la constante A.

Solución

Para mostrar que Ae^{x} es solución de la EDO, se reemplaza en la EDO, obteniendo

$$(D-3)^2(D^2+4)D^2Ae^x = 4e^x \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

Luego, aplicando los operadores, del lado izquierdo de la EDO se desprende:

$$\begin{aligned}
D^2Ae^x &= AD^2e^x = Ae^x \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}\\
\Longrightarrow (D^2+4)D^2Ae^x &= (D^2+4)Ae^x\\
&= Ae^x + 4Ae^x\\
&= 5Ae^x \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}\\
\Longrightarrow (D-3)^2(D^2+4)D^2Ae^x &= (D-3)^2 5Ae^x\\
&= 5A(D-3)(D-3)e^x\\
&= 5A(D-3)(e^x-3e^x)\\
&= 5A(D-3)(-2e^x) = -10A(D-3)e^x\\
&= -10A(e^x-3e^x)\\
&= 20Ae^x \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}
\end{aligned}$$

Luego, la EDO evaluada en la función $y = Ae^x$ queda

$$20Ae^x = 4e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x(20A-4) = 0 \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

Como $e^x > 0 \ \ \forall x \Rightarrow 20A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ $\leftarrow$ [0.3 pts]
Luego $y_p = \frac{1}{5}e^x$ satisface la EDO $\Rightarrow$ $y_p = \frac{1}{5}e^x$ es solución particular. $\leftarrow$ [0.2 pts]

III) (0.5 pts) ¿Cuál es la solución general de la EDO?

Solución

La solución general de la EDO es $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ $\leftarrow$ [0.1 pts] donde

$$\begin{aligned}
y_h(x) &= C_1 + C_2x + C_3e^{3x} + C_4xe^{3x}\\
&\quad + C_5\cos(2x) + C_6\sin(2x) \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}\\
y_p(x) &= \frac{1}{5}e^x \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}
\end{aligned}$$

P2. a) (3 pts) Determine la solución general de la siguiente EDO:

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0.$$

I) (1.5 pts) Busque primero una solución de la forma $y_1(x) = x^n$ y no olvide establecer la ecuación normalizada.

Solución

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0 \quad \text{con } x > 0$$

Como $x > 0$ se puede normalizar la EDO dividiendo por x^2:

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{y}{x^2} = 0 \quad \leftarrow [0.3 \text{ pts}]$$

Se postula $y_1(x)$ de la forma $y_1(x) = x^n$

Verificando:

$$y_1' = nx^{n-1} \quad ; \quad y_1'' = n(n-1)x^{n-2}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} n(n-1)x^{n-2} + \frac{3}{x}nx^{n-1} + \frac{x^n}{x^2} &= 0 \\ \Rightarrow n(n-1)x^{n-2} + 3nx^{n-2} + x^{n-2} &= 0 \\ \Rightarrow (n^2 - n + 3n + 1)x^{n-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (n^2 + 2n + 1)x^{n-2} = 0 \quad &\leftarrow [0.4 \text{ pts}] \end{aligned}$$

Como $x > 0 \Rightarrow n^2 + 2n + 1 = 0 \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}]$
Para obtener n se resuelve la ecuación cuadrática:

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow \boxed{n = -1} \quad \leftarrow [0.3 \text{ pts}]$$

Luego, una solución de la EDO es:

$$y_1(x) = x^{-1} \quad \leftarrow [0.3 \text{ pts}]$$

II) (1.5 pts) Use la fórmula de Liouville (método de reducción de orden) para establecer la otra solución linealmente independiente.

Solución

Para la EDO normalizada:

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{y}{x^2} = 0 \quad \leftarrow [0.1 \text{ pts}]$$

Se sabe que $y_1(x) = x^{-1}$ es solución.

Para encontrar la segunda solución $y_2(x)$, que sea l.i. con $y_1(x)$, se puede utilizar la fórmula de Liouville (método de reducción de orden):

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int \overline{a}_1(x)\,dx}}{(y_1(x))^2}\,dx \quad \leftarrow \text{[0.5 pts]}$$

donde $\overline{a}_1(x)$ es el coeficiente que acompaña a y' en la EDO normalizada:

$$\Rightarrow \overline{a}_1(x) = \frac{3}{x} \quad \leftarrow \text{[0.3 pts]}$$

Veamos:

$$\int \overline{a}_1(x)\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln(|x|) = \ln(|x|^3)$$

Pero $x > 0$, entonces:

$$\int \overline{a}_1(x)\,dx = \ln(x^3)$$
$$\Rightarrow e^{-\int \overline{a}_1(x)dx} = x^{-3} \quad \leftarrow \text{[0.3 pts]}$$

Luego, de la fórmula de Liouville y recordando que $y_1(x) = x^{-1}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_2(x) &= x^{-1}\int \frac{x^{-3}}{(x^{-1})^2}\,dx = x^{-1}\int \frac{x^{-3}}{x^{-2}}\,dx \\ &= x^{-1}\int \frac{1}{x}\,dx = x^{-1}\ln(|x|) \\ \text{pero } x > 0 \quad \Rightarrow \quad & y_2(x) = \frac{1}{x}\ln(x) \quad \leftarrow \text{[0.3 pts]} \end{aligned}$$

b) (3 pts) Considere la ecuación $y'' + q(x)y = 0$ donde q es una función continua.

I) (1 pto) Pruebe que el Wronskiano de cualquier par de soluciones linealmente independientes es constante.

Solución

Por la fórmula de Abel, se tiene que $W = Ce^{-\int \overline{a}_1(x)dx}$ donde $\overline{a}_1(x)$ es el coeficiente que acompaña a y' en la ecuación. Como este coeficiente es cero, se obtiene que $W = C$ constante. 1pt

II) (1 pto) Usando lo anterior, si se sabe que una de las soluciones de la ecuación está dada por $(1 + x)^2$, encuentre la otra solución linealmente independiente y calcule el valor exacto del Wronskiano.

Solución

Usando la fórmula de Liouville o reducción del orden con $y_1 = (1+x)^2$ se obtiene que la otra solución es

$$y_2 = \frac{cte}{y_1} \int y_1^2 = -\frac{cte}{3} \frac{1}{1+x}$$

o cualquier múltiplo de ella, por simplicidad escogemos $cte = -3$:

$$\boxed{y_2 = \frac{1}{1+x}.} \ {\color{red}0{,}75pt}$$

Esto también se puede obtener usando que el Wronskiano es constante y resolviendo para y_2 la EDO:

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = cte.$$

Con esto, el Wronskiano resulta ser:

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (1+x)^2 \frac{-1}{(1+x)^2} - 2(1+x)\frac{1}{(1+x)} = \boxed{-3.} \ {\color{red}0{,}25pt}$$

III) (1 pto) Calcule la solución general de la ecuación $y'' + q(x)y = 1 + x$.

Solución

Usamos variación de parámetros para obtener la solución particular:

$$y_p = -(x+1)^2 \int \frac{(x+1)\frac{1}{x+1}}{-3} + \frac{1}{x+1} \int \frac{(x+1)(x+1)^2}{-3}$$

de donde

$$y_p = \frac{x(1+x)^2}{3} - \frac{(1+x)^3}{12} = \boxed{\frac{(3x-1)(1+x)^2}{12}} \ {\color{red}0{,}75pt}$$

de donde la solución general es de la forma:

$$\boxed{y = C_1(1+x)^2 + C_2 \frac{1}{1+x} + \frac{(3x-1)(1+x)^2}{12}.} \ {\color{red}0{,}25pt}$$

P3. Las pequeñas oscilaciones de una cuerda con un extremo fijo y otro libre y sometida a una fuerza externa conducen al estudio de una EDO de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = f(x), \quad x \in [0, \pi] \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(\pi) = 0, \tag{2}$$

donde f es una función continua en $[0, \pi]$ y $k > 0$ es una constante.

a) (2 pts) Encuentre una base $\{y_1, y_2\}$ de soluciones homogéneas de la ecuación (1) y calcule el Wronskiano asociado $W(y_1, y_2)$.

Solución

El polinomio característico asociado a la EDO es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + k^2$$

por lo que los valores característicos, soluciones de $p(\lambda) = 0$, son los complejos conjugados

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm ik.} \ 0{,}5pt$$

Las soluciones homogéneas son entonces

$$\boxed{y_1 = \cos(kx), \quad y_2 = \sin(kx).} \ 1pt$$

El Wronskiano asociado es:

$$W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{vmatrix} = \boxed{k.} \ 0{,}5pt$$

b) (2 pts) Use variación de parámetros para demostrar que una solución particular y_p de la ecuación (1) está dada por:

$$y_p(x) = \frac{1}{k}\int_0^x \sin(k(x-s))f(s)ds.$$

Ind: Le puede ser útil la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$.

Solución

En la fórmula de variación de parámetros

$$\boxed{y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2 f}{W} + y_2(x)\int \frac{y_1 f}{W}} \ 0{,}5pt$$

podemos escoger las constantes de integración arbitrariamente, pues esto contribuye solamente en soluciones homogéneas que se suman a la particular. En nuestro caso, las escogemos tales que:

$$\boxed{y_p(x) = -y_1(x)\int_0^x \frac{y_2 f}{W} + y_2(x)\int_0^x \frac{y_1 f}{W}} \ 1pt$$

de donde se obtiene, reemplazando por las soluciones de la parte anterior, que:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos(kx)\int_0^x \frac{f(s)\sin(ks)}{k}ds + \sin(kx)\int_0^x \frac{f(s)\cos(ks)}{k}ds \\ &= \boxed{\frac{1}{k}\int_0^x \sin(k(x-s))f(s)ds,}\ \textcolor{red}{0{,}5pt} \end{aligned}$$

usando la fórmula del seno de la suma de ángulos.

c) (2 pts) Suponga que k es un entero positivo. Usando que la solución general del problema tiene la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p$ donde y_1, y_2 e y_p son las soluciones encontradas en las partes anteriores y C_1, C_2 son constantes, pruebe que al imponer las condiciones de borde (2) se obtiene:

$$y(x) = a_k\sin(kx) + y_p(x), \quad \text{donde} \quad a_k = -\frac{1}{k}\int_0^\pi \cos(ks)f(s)ds.$$

Solución

La solución general queda

$$\boxed{y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p} = C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx) + \frac{1}{k}\int_0^x \sin(k(x-s))f(s)ds$$

Imponiendo la condición $y(0) = 0$ se obtiene, dado que $\sin(k\pi) = 0$ (aquí se usa que k es entero), que:

$$y(0) = C_1 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 0}\ \textcolor{red}{0{,}5pt}$$

Imponiendo ahora la condición $y'(\pi) = 0$ se obtiene:

$$y'(\pi) = C_2k\cos(k\pi) + y_p'(\pi) = 0$$

para lo que necesitamos calcular:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \frac{1}{k}\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(k(x-s))f(s)ds \\ &= \frac{1}{k}\frac{d}{dx}\left(\sin(kx)\int_0^x \cos(ks)f(s)ds - \cos(kx)\int_0^x \sin(ks)f(s)ds\right) \\ &= \frac{1}{k}\Big(k\cos(kx)\int_0^x \cos(ks)f(s)ds + \sin(kx)\cos(kx)f(x) \\ &\quad +k\sin(kx)\int_0^x \sin(ks)f(s)ds - \cos(kx)\sin(kx)f(x)\Big) \\ &= \boxed{\int_0^x \cos(k(x-s))f(s)ds}\ \textcolor{red}{0{,}5pt} \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{y_p'(\pi) = \int_0^\pi \cos(k(\pi-s))f(s)ds = \cos(k\pi)\int_0^\pi \cos(ks)f(s)ds.}\ \textcolor{red}{0{,}5pt}$$

Reemplazando se tiene que

$$y'(\pi) = C_2 \, k\cos(k\,\pi) + \cos(k\pi)\int_0^{\pi} \cos(ks)f(s)ds = 0$$

(aquí de nuevo se usó que k es entero) de donde

$$\boxed{C_2 = -\frac{1}{k}\int_0^{x} \cos(ks)f(s)\,ds = a_k} \; 0{,}5pt$$

y de esta manera, reemplazando C_1 y C_2 en la forma general de la solución, se deduce que:

$$y(x) = a_k \sin(kx) + y_p(x).$$