Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2024-1, Coordinado.
Miércoles 8 de Mayo

# PAUTA CONTROL 2

**P1. a)** Considere la EDO $y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x}$

**i)** (0.75 pto) Encuentre la solución homogénea $y_h$.

**Solución**

La EDO homogénea asociada es $y'' - 2y' + 2y = 0$, es lineal y a coeficientes constantes. Luego se puede plantear el polinomio característico de la EDO como $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ ←[0.25 pts].
Los valores característicos de la EDO son las raíces de $p(\lambda)$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i \quad \leftarrow \text{[0.25 pts]}$$

y son complejas conjugadas.

Luego, basado en $\lambda_{1,2}$, la solución homogénea de la EDO lineal de segundo orden, se puede escribir como la siguiente combinación lineal de 2 funciones l.i.,

$$y_h(x) = c_1 \underbrace{e^x \cos(x)}_{y_{h1}(x)} + c_2 \underbrace{e^x \operatorname{sen}(x)}_{y_{h2}(x)} \quad \leftarrow \text{[0.25 pts]}$$

**Comentarios para la corrección**

La EDO homogénea es de la forma $F(y'', y', y) = 0$, por lo que eventualmente, en vez de usar el polinomio característico, se podría usar un cambio de variable ad-hoc para reducir el orden de la EDO, y resolver dos EDOs de primer orden de manera sucesiva.

**ii)** (1.5 ptos) Encuentre la solución particular $y_p$ usando el método de variación de parámetros.

**Solución**

La solución particular planteada por el método de variación de parámetros es de la forma:

$$y_p(x) = v_1(x) y_{h1}(x) + v_2(x) y_{h2}(x) \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

donde

$$v_1(x) = \int \frac{-y_{h2}(x) Q(x)}{W(x)} dx \quad , \quad v_2(x) = \int \frac{y_{h1}(x) Q(x)}{W(x)} dx, \quad \leftarrow \text{[0.3 pts]}$$

y $Q(x) = 4e^{2x}$ es el lado derecho de la EDO. $W(x)$ es el Wronskiano de la EDO, que se calcula como:

$$\begin{aligned}
W(x) &= W(y_{h1}, y_{h2}) = \det \begin{pmatrix} y_{h1} & y_{h2} \\ y'_{h1} & y'_{h2} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} e^x \cos(x) & e^x \operatorname{sen}(x) \\ e^x(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) & e^x(\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \end{pmatrix} \\
&= e^{2x}(\cos^2(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)) \\
&= e^{2x} \quad \leftarrow [0.3 \text{ pts}]
\end{aligned}$$

Luego se puede calcular:

$$v_1(x) = \int \frac{-y_{h2}(x)Q(x)}{W(x)}dx = -\int \frac{e^x \operatorname{sen}(x) 4e^{2x}}{e^{2x}}dx = -4\underbrace{\int e^x \operatorname{sen}(x)dx}_{\mathbf{I}}$$

Integración por partes: sea $u = e^x$, $du = e^x dx$, $dv = \operatorname{sen}(x)dx$, $v = -cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)dx \quad \leftarrow \quad \begin{array}{c|c} u = e^x & dv = \cos(x)dx \\ du = e^x dx & v = \operatorname{sen}(x) \end{array} \\
&= -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen}(x)dx}_{\mathbf{I}} \\
&= \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_1(x) = -2e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) \quad \leftarrow [0.25 \text{ pts}]$$

De la misma manera,

$$v_2(x) = \int \frac{y_{h1}(x)Q(x)}{W(x)}dx = \int \frac{e^x \cos(x) 4e^{2x}}{e^{2x}}dx = 4\underbrace{\int e^x \cos(x)dx}_{\mathbf{J}}$$

Integración por partes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \int e^x \cos(x)dx \quad \leftarrow \quad \begin{array}{c|c} u = e^x & dv = \cos(x)dx \\ du = e^x dx & v = \operatorname{sen}(x) \end{array} \\
&= e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)dx \quad \leftarrow \quad \begin{array}{c|c} u = e^x & dv = \operatorname{sen}(x)dx \\ du = e^x dx & v = -\cos(x) \end{array} \\
&= e^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x) - \underbrace{\int e^x \cos(x)dx}_{\mathbf{J}} \\
&= \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_2(x) = 2e^x(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) \quad \leftarrow [0.25 \text{ pts}]$$

Luego,

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= v_1(x)y_{h1}(x) + v_2(x)y_{h2}(x) \\
&= -2e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))e^x cos(x) + 2e^x(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))e^x \operatorname{sen}(x) \\
&= 2e^{2x}\left(\cancel{-\operatorname{sen}(x)\cos(x)} + \underbrace{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}_{=1} \cancel{+\cos(x)\operatorname{sen}(x)}\right) \\
\Rightarrow y_p(x) &= 2e^{2x} \quad \leftarrow [0.2 \text{ pts}]
\end{aligned}$$

Comentarios para la corrección

Podría aparecer algún caso en que el/la estudiante agrega la constante de integración al calcular la primitiva. De pasar esto, al calcular $y_p(x)$ aparece la función encontrada en la caja anterior más otras funciones que son solución de la EDO homogénea. Estrictamente hablando, es una solución particular que es correcta, pero no se ha aplicado bien el método de variación de parámetros. Luego, en este caso se debe asignar sólo la mitad del puntaje.

**iii)** (0.75 pto) Encuentre la solución de la EDO que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

Solución

Las condiciones iniciales, se evalúan usando la solución general de la EDO,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x\cos(x) + c_2e^x\operatorname{sen}(x) + 2e^{2x} \quad \leftarrow [0.3 \text{ pts}]$$

se necesita la primera derivada de $y(x)$

$$y'(x) = c_1e^x(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) + c_2e^x(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) + 4e^{2x} \quad \leftarrow [0.15 \text{ pts}]$$

Luego, las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, se traducen en,

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 + 2 = 0 \quad \to \quad c_1 = -2 \quad \leftarrow [0.1 \text{ pts}] \\
y'(0) &= c_1 + c_2 + 4 = 0 \quad \to \quad c_2 = -4 - c_1 = -2 \quad \leftarrow [0.1 \text{ pts}]
\end{aligned}$$

con lo que la solución que satisface las condiciones iniciales queda

$$\begin{aligned}
y(x) &= -2e^x\cos(x) - 2e^x\operatorname{sen}(x) + 2e^{2x} \\
&= -2e^x(\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - e^x) \quad \leftarrow [0.10 \text{ pts}]
\end{aligned}$$

Comentarios para la corrección

El primer puntaje se asigna porque el/la estudiante sabe que se debe aplicar las condiciones iniciales a la solución general de la EDO.
Para el último puntaje asignado, se admite cualquiera de las dos expresiones mostradas para y(x).

**b)** (2 pts.) Considere la EDO

$$(D-2)(D^2+1)y = 4e^{2x}$$

**i)** (1.0 pto) Encuentre la solución homogénea $y_h$.

**Solución**

El polinomio característico está dado por $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$ de donde los valores caracterìsticos son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = i$ y $\lambda_3 = -i$. ←[0.5 ptos].
Esto nos dice que la solución homogénea está dada por:

$$y_h = C_1\, e^{2x} + C_2\, \operatorname{sen} x + C_3\, \cos x.$$

donde $C_1$, $C_2$ y $C_3$ son constantes reales. ←[0.5 ptos].

**Comentarios para la corrección**

Puede ser que el alumno/a escriba directamente la solución homogénea, sin embargo, es necesario que explique cómo llega a dicha expresión, a través de los valores característicos. Si el/la alumno/a no precisa que las constantes son reales o algo equivalente a decir que son arbitrarias se descuenta ←[-0.1 ptos]

**ii)** (0.5 ptos) ¿De qué EDO homogénea lineal de primer orden es solución el lado derecho de la EDO anterior?

**Solución**

El lado derecho $f(x) = 4e^{2x}$ de la EDO es solución de la EDO lineal de primer orden a coeficientes constantes siguiente:

$$(D-2)f(x) = f' - 2f = 0.$$

←[0.5 ptos]

**Comentarios para la corrección**

No hay comentarios.

**iii)** (1.0 pto) Usando lo anterior, encuentre la forma que tiene la solución particular $y_p$. Explique su razonamiento.

**Solución**

Para encontrar la solución de la EDO, aplicamos el operador $(D-2)$ a ambos lados de la EDO, obteniendo por la parte anterior:

$$(D-2)^2(D^2+1)y = 0.$$

←[0.5 ptos] La forma de la solución particular será la parte de la solución general $y = y_h + y_p$ que no es linealmente dependiente con $y_h$ ←[0.25 ptos], es decir:

$$y_p = Ax\, e^{2x}$$

donde $A$ es una constante real. ←[0.25 ptos]

Comentarios para la corrección

Como alternativa a decir "La forma de la solución particular será la parte de la solución general $y = y_h + y_p$ que no es linealmente dependiente con $y_h$", en la resolución, pueden indicar que la solución particular es una combinación lineal de las funciones que forman la base de la solución general de $(D-2)^2(D^2+1)y = 0$, y que no son parte del conjunto de funciones base de la solución homogénea de $(D-2)(D^2+1)y = 4e^{2x}$

**iv)** (0.5 ptos) Evalúe la o las constantes que aparecen en la solución particular, reemplazándola en la EDO original.

Solución

Reemplazando en la EDO original la solución particular $y_p$ de la parte anterior se obtiene

$$\begin{aligned}(D-2)(D^2+1)(Ax\, e^{2x}) &= A(D^2+1)(D-2)(x\, e^{2x}) \\ &= A(D^2+1)e^{2x} \\ &= 5Ae^{2x} \\ &= 4e^{2x}\end{aligned}$$

←[0.25 ptos] de donde

$$5A = 4 \quad \Rightarrow \quad A = 4/5$$

←[0.25 ptos]

Comentarios para la corrección

En la evaluación de $A$ se permutaron los factores para facilitar el cálculo de las derivadas, pero se puede hacer también sin permutar, lo que es un camino más largo con el mismo resultado.

**P2.** Para $x > 0$, considere el operador diferencial

$$P(xD) = (xD - \alpha_1)(xD - \alpha_2)(xD - \alpha_3)$$

donde $\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, 3$ son **todos distintos** y por definición $(xD - \alpha_j)y = xy' - \alpha_j y$.

**i)** (pje) (1 pto) Demuestre que el orden de la composición en $P(xD)$ no importa, es decir para $\alpha$ y $\beta$ reales:

$$(xD - \alpha)(xD - \beta)y = (xD - \alpha)(xD - \beta)y$$

**Solución**

Veamos que los factores conmutan (para la composición de operadores)

$$\begin{aligned}
(xD - \alpha)(xD - \beta)f &= (xD - \alpha)(xf' - \beta f) \\
&= x(xf' - \beta f)' - \alpha(xf' - \beta f) \\
&= x^2 f'' - \beta\, xf' - \alpha\, xf' + \alpha\beta f \\
&= x^2 f'' - \alpha\, xf' - \beta\, xf' + \beta\alpha f \\
&= x(xf' - \alpha f)' - \beta(xf' - \alpha f) \\
&= (xD - \beta)(xf' - \alpha f) \\
&= (xD - \beta)(xD - \alpha)f
\end{aligned}$$

←[1 pto].

**Comentarios para la corrección**

Algunos/as alumnos/as podrán reemplazar $\alpha$ o $\beta$ por $\alpha\, I$ o $\beta\, I$ donde $I$ es el operador identidad, eso es correcto. También reemplazar los productos por composición, esto también es correcto. Omitir la composición o la identidad es también correcto pues depende de la notación que se adoptó en cada sección. Asimismo, se puede desarrollar ambos lados de la igualdad de manera independiente y llegar a que son idénticas.

**ii)** (1 pto) Demuestre la propiedades siguientes:

$$(xD - \alpha)x^\beta = (\beta - \alpha)x^\beta \qquad (1)$$

$$(xD - \alpha)(x^\beta f(x)) = x^\beta (xD - \alpha + \beta)f(x) \qquad (2)$$

donde $\alpha$, $\beta$ son reales y $f$ es una función derivable.

**Solución**

La primera propiedad:

$$(xD - \alpha)x^\beta = x(x^\beta)' - \alpha x^\beta = \beta x\, x^{\beta-1} - \alpha x^\beta = (\beta - \alpha)x^\beta \leftarrow \text{[0.5 ptos]}$$

La segunda propiedad:

$$\begin{aligned}(xD-\alpha)(x^\beta f(x)) &= x(x^\beta f(x))' - \alpha(x^\beta f(x)) \\ &= \beta x^\beta f + x^{\beta+1} f' - \alpha x^\beta f \\ &= x^\beta(\beta f + x\, f' - \alpha f) \\ &= x^\beta(xD - \alpha + \beta) f \quad \leftarrow [0.5 \text{ ptos}].\end{aligned}$$

Comentarios para la corrección

No hay comentarios.

**iii)** (1 pto) A partir de lo anterior verifique que $x^{\alpha_j}$ son soluciones de la EDO homogénea $P(xD)y = 0$ para $j = 1, 2, 3$.

Solución

De la parte anterior claramente $(xD-\alpha_1)x^{\alpha_1} = 0$, $(xD-\alpha_2)x^{\alpha_2} = 0$, $(xD-\alpha_3)x^{\alpha_3} = 0$ como los operadores conmutan entonces:

$$(xD-\alpha_1)(xD-\alpha_2)(xD-\alpha_3)x^{\alpha_1} = (xD-\alpha_2)(xD-\alpha_3)(xD-\alpha_1)x^{\alpha_1} = 0$$

y lo mismo para las otras dos soluciones. ←[1 pto].

Comentarios para la corrección

No hay comentarios.

**iv)** (1 pto) Demuestre que $\{x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, x^{\alpha_3}\}$ son linealmente independientes. Para ello muestre que el Wronskiano en $x = 1$ es $W(1) = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)$ y explique por qué esto basta para la independedncia lineal.

Solución

Calculando:

$$
\begin{aligned}
W(1) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1(\alpha_1-1) & \alpha_2(\alpha_2-1) & \alpha_3(\alpha_3-1) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2(\alpha_2-1) & \alpha_3(\alpha_3-1) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1(\alpha_1-1) & \alpha_3(\alpha_3-1) \end{pmatrix} \\
&+ \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1(\alpha_1-1) & \alpha_2(\alpha_2-1) \end{pmatrix} \\
&= \alpha_2\,\alpha_3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2-1 & \alpha_3-1 \end{pmatrix} - \alpha_1\,\alpha_3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1-1 & \alpha_3-1 \end{pmatrix} \\
&+ \alpha_1\,\alpha_2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1-1 & \alpha_2-1 \end{pmatrix} \\
&= \alpha_2\,\alpha_3\,(\alpha_3-\alpha_2) - \alpha_1\,\alpha_3\,(\alpha_3-\alpha_1) + \alpha_1\,\alpha_2\,(\alpha_2-\alpha_1) \\
&= \alpha_2\,\alpha_3^2 - \alpha_2^2\,\alpha_3 - \alpha_1\,\alpha_3^2 + \alpha_1^2\,\alpha_3 + \alpha_1\,\alpha_2^2 - \alpha_1^2\,\alpha_2.
\end{aligned}
$$

←[0.6 ptos]. Y por otro lado

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1) = \\
&(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1) = \\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2\,\alpha_2 - \alpha_1\,\alpha_3^2 + \alpha_1^2\,\alpha_3 - \alpha_2^2\,\alpha_3 + \alpha_1\,\alpha_2^2 + \alpha_2\,\alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\
&= \alpha_2\,\alpha_3^2 - \alpha_2^2\,\alpha_3 - \alpha_1\,\alpha_3^2 + \alpha_1^2\,\alpha_3 + \alpha_1\,\alpha_2^2 - \alpha_1^2\,\alpha_2.
\end{aligned}
$$

←[0.2 ptos]. Como el Wronskiano resulta distinto de cero en el punto $x = 1$, dado que los $\lambda_j$ son distintos entre sí, entonces las funciones son linealmente independientes para $x > 0$. ←[0.2 ptos].

Comentarios para la corrección

Algún alumno podría demostrar la independencia lineal aplicando operadores de la forma $(xD-\alpha_2)(xD-\alpha_3)$ a una combinación lineal de manera de anular el primer coeficiente de la combinación. Esto se considerará correcto. La propiedad de que si el Wronskiano es distinto de cero en un punto del intervalo hay independencia lineal en todo el intervalo es fácil de establecer, pero no se pide demostrarla, es parte de los resultados vistos en clases.

**v)** (1 pto) ¿Por qué se aplica la teoría de EDO lineales de orden superior vista en clases en este caso? ¿Por qué esta es una base de soluciones homogéneas? ¿Qué dimensión tiene el espacio de soluciones homogéneas? Concluya que la EDO homogénea $P(xD)y = 0$ tiene como solución

$$y_h(x) = c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + c_3 x^{\alpha_3} \quad \text{para} \quad x > 0$$

donde $c_1, c_2, c_3$ son constantes reales.

Solución

Se aplica la teoría de EDO lineales de orden superior vista en clases dado que la EDO tiene coeficientes que son funciones continuas (polinomios) para $x > 0$, esto es porque se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad que es la base de esta teoría. ←[0.2 pto]. El conjunto $\{x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, x^{\alpha_3}\}$ es una base pues es un conjunto linealmente independiente por un lado como se vio en la parte anterior y por otro lado el conjunto de soluciones homogéneas es un espacio vectorial de dimensión tres, por lo que bastan tres funciones linealmente independientes para generarlo. ←[0.8 pto].

Comentarios para la corrección

Si no se dice explícitamente que el espacio de soluciones homogéneas es de dimensión 3 descontar ←[-0.4 pto] ya que se pide explícitamente en el enunciado.

**vi)** (1 pto) Usando las partes anteriores, en particular las propiedades (1) y (2), encuentre la solución homogénea y la forma que tiene la solución particular de la EDO siguiente:

$$(xD-3)(xD-4)(xD-5)(x^2y) = x^{3/2}, \quad \text{con} \quad x > 0.$$

Indicación:

Dado $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$.

Solución

Por las partes anteriores, y dada la propiedad (2), la EDO queda

$$x^2(xD-1)(xD-2)(xD-3)y = x^{3/2}, \quad \text{con} \quad x > 0.$$

Luego, es claro que la solución homogénea tiene la forma:

$$y_h = C_1x^1 + C_2x^2 + C_3x^3$$

donde $C_1$, $C_2$ y $C_3$ son constantes reales. ←[0.5 ptos]. Por otro lado dado que $(xD-3/2)x^{3/2} = 0$, si aplicamos este operador a la EDO que resulta despues de aplicar la propiedad (2) queda

$$(xD-3/2)x^2(xD-1)(xD-2)(xD-3)y = (xD-3/2)x^{3/2} = 0$$

y aplicando la propiedad (2) nuevamente, se tiene

$$x^2(xD+1/2)(xD-1)(xD-2)(xD-3)y = 0$$

y como $y = y_h + y_p$, la parte $y_p$ linealmente independiente con la solución homogénea tendrá la forma:

$$y_p = Ax^{-1/2}$$

donde $A$ es una constante. ←[0.5 ptos].

Comentarios para la corrección

No se pide determinar la constante $A$ en este problema.

**P3.** Motivados por las oscilaciones de un líquido que ocurren en la chimenea de una represa al cerrar una válvula, se plantea un modelo simplificado de un tubo en U (ver Figura).

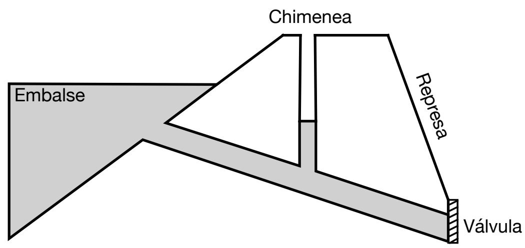
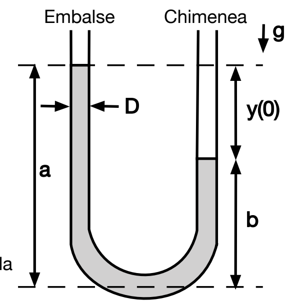


Ilustración Sistema
Represa - Embalse - Chimenea



Modelo Simplificado

La diferencia de altura $y(t)$ entre los extremos de la columna de líquido en el tubo con forma de U (en gris), de diámetro $D > 0$, largo total entre sus extremos $L > 0$ y viscosidad $\nu \geq 0$, sujeta a una aceleración de gravedad $g$, satisface:

$$y'' + 2ky' + \omega y = 0, \quad t \geq 0, \quad k = \frac{16\nu}{D^2}, \quad \omega = \frac{2g}{L}.$$

Inicialmente $y(0) = b - a$ tal que $|b - a| < \frac{L}{4}$, $\quad y'(0) = -v_0, \quad v_0 > 0$. Aquí, $v_0$ es una velocidad inicial que se usa para representar un fenómeno llamado *golpe de ariete*.

**i)** (2.5 ptos) Resuelva la ecuación con condiciones iniciales si $\nu = 0$ (sin fricción). Discuta cualitativamente graficando $y(t)$. Para graficar, considere que $y(0) = b - a < 0$, e indique claramente las condiciones iniciales en el gráfico.

**Solución**

Si $\nu = 0$, se tiene $k = 0$, por lo que la EDO queda

$$y'' + \omega y = 0$$

Como es una EDO a coeficientes constantes, el polinomio característico esta dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega \qquad \leftarrow \text{[0.4 pts]}$$

y como $\omega = \frac{2g}{L} > 0$, los valores característicos (las raíces del polinomio) son:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega} \qquad \leftarrow \text{[0.4 pts]}$$

Lo anterios nos dice que la solución general de la EDO (que es una EDO homogénea de segundo orden) es:

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{\omega}\, t) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}\, t) \qquad \leftarrow \text{[1.0 pts]}$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes reales.

Para aplicar las condiciones iniciales se necesita

$$y'(t) = -\sqrt{\omega}\, C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}\, t) + \sqrt{\omega}\, C_2 \cos(\sqrt{\omega}\, t) \qquad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

Luego, con las condiciones iniciales, se tiene:

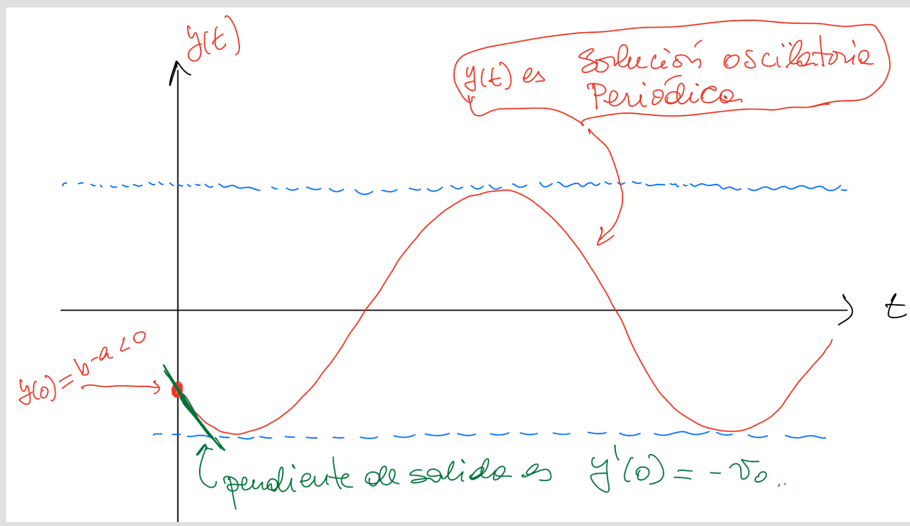
$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 \cos(\sqrt{\omega}\, 0) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}\, 0) = C_1 = b - a \\ y'(0) &= -\sqrt{\omega}\, C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}\, 0) + \sqrt{\omega}\, C_2 \cos(\sqrt{\omega}\, 0) = \sqrt{\omega} C_2 = -v_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1 = b - a \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{-v_0}{\sqrt{\omega}} \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

Y la solución de la EDO que satisface las condiciones iniciales queda:

$$y(t) = (b-a)\cos(\sqrt{\omega}\, t) - \frac{v_0}{\sqrt{\omega}} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}\, t) \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

Ahora, para graficar la solución, como los valores característicos son complejos conjugados con parte real nula, la solución a graficar es oscilatoria, en donde la aplitud máxima de las oscilaciones se mantiene constante en el tiempo (i.e., el sistema nunca deja de oscilar). Luego, tomando en cuenta las condiciones iniciales $y(0) = b - a < 0, \quad y'(0) = -v_0 < 0$, la solución se puede graficar como:




$\leftarrow$
[0.1 pts por graficar la función y 0.1 pts por las condiciones inciales]

**Comentarios para la corrección**

Puede ser que el/la alumno/a escriba directamente la solución de la EDO homogénea, sin embargo, es necesario que explique cómo llega a dicha expresión, a través de los valores característicos.

**ii)** (2.5 ptos) Si ahora $\nu > 0$, resuelva la ecuación con condiciones iniciales para el caso $k^2 < \omega$. Discuta cualitativamente graficando $y(t)$. Para graficar, considere que $y(0) = b - a < 0$, e indique claramente las condiciones iniciales en el gráfico.

**Solución**

Para $\nu > 0$, el sistema en estudio queda representado por la EDO homogénea de segundo orden a coeficientes constantes

$$y'' + 2ky' + \omega y = 0$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2k\lambda + \omega \qquad \leftarrow \text{[0.4 pts]}$$

y las raíces del polinomio son los valores característicos,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\omega}}{2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega} \qquad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

Aquí $k^2 - \omega < 0$, luego las raíces del polinomio característico (i.e., los valores característicos) son

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -k + i\sqrt{\omega - k^2} \\ \lambda_2 = -k - i\sqrt{\omega - k^2} \end{array}\right\} \text{complejas conjugadas} \quad \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

de lo cual se desprende que la solución general de la EDO es:

$$y(t) = C_1\, e^{-k\,t} \cos(\sqrt{\omega - k^2}\, t) + C_2\, e^{-k\,t} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega - k^2}\, t) \qquad \leftarrow \text{[1.0 pts]}$$

Para evaluar las condiciones iniciales $y(0) = b - a, \quad y'(0) = -v_0$ se necesita

$$\begin{aligned} y'(t) \quad &= \quad C_1\, e^{-k\,t} \left(-k \cos(\sqrt{\omega - k^2}\, t) - \sqrt{\omega - k^2} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega - k^2}\, t)\right) \\ &\quad + C_2\, e^{-k\,t} \left(-k \operatorname{sen}(\sqrt{\omega - k^2}\, t) + \sqrt{\omega - k^2} \cos(\sqrt{\omega - k^2}\, t)\right) \\ &\quad \leftarrow \text{[0.2 pts]} \end{aligned}$$

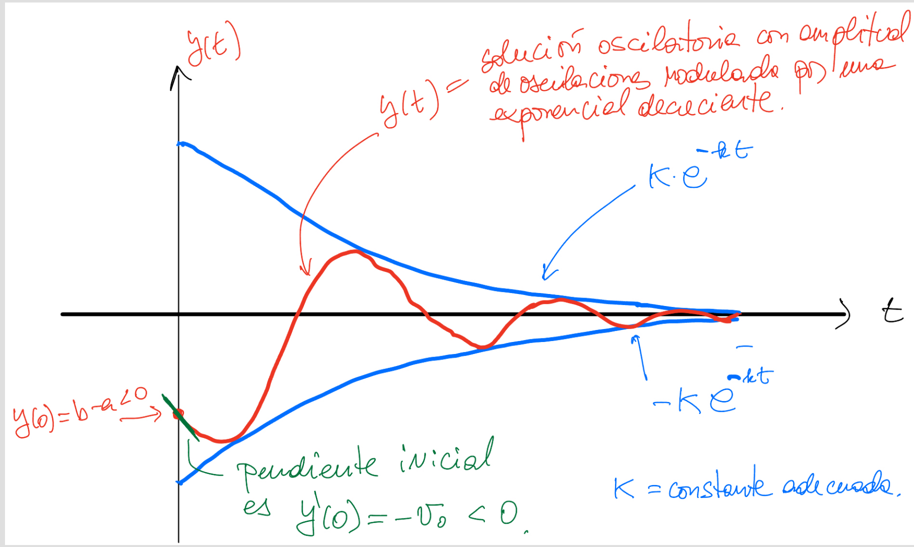
$$\begin{aligned} \text{Luego,} \quad y(0) \quad &= \quad C_1 = b - a \qquad \leftarrow \text{[0.1 pts]} \\ y'(0) \quad &= \quad -k\, C_1 + C_2 \sqrt{\omega - k^2} = -v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_2 \quad &= \quad \frac{-v_0 + k\, C_1}{\sqrt{\omega - k^2}} \\ &= \quad \frac{k\,(b - a) - v_0}{\sqrt{\omega - k^2}} \qquad \leftarrow \text{[0.1 pts]} \end{aligned}$$

Luego, la solución de la EDO que satisface las condiciones iniciales para el caso $k^2 < \omega$ es:

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= \quad C_1\, e^{-k\,t} \cos(\sqrt{\omega - k^2}\, t) + C_2\, e^{-k\,t} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega - k^2}\, t) \\ &= \quad (b - a)\, e^{-k\,t} \cos(\sqrt{\omega - k^2}\, t) \\ &\quad\quad + \frac{k\,(b - a) - v_0}{\sqrt{\omega - k^2}}\, e^{-k\,t} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega - k^2}\, t) \qquad \leftarrow \text{[0.1 pts]} \end{aligned}$$

Ahora, para graficar la solución, como los valores característicos son complejos conjugados con parte real negativa, la solución a graficar es oscilatoria, con la amplitud máxima de las oscilaciones decreciendo en el tiempo, modulada por la función exponencial $e^{-kt}$. Luego, tomando en cuenta las condiciones iniciales $y(0) = b - a < 0, \quad y'(0) = -v_0 < 0$, la solución se puede graficar como:




←
[0.1 pts por graficar la función y 0.1 pts por las condiciones inciales]

**Comentarios para la corrección**

Los gráficos deben especificar la condición inicial solicitada, es decir el punto de partida negativo $y(0) = b - a < 0$ y con pendiente negativa $y'(0) = -v0$. Si algún(a) estudiante se equivocara y escogiera $y(0) = b - a > 0$, los gráficos deben reflejar ese cambio.

**iii)** (1 pto) Para $\nu > 0$ y en el caso $k^2 < w$, encuentre una condición sobre $v_0$ en función de los parámetros del problema para evitar un rebalse, esto es, imponer que $|y(t)| \leq \dfrac{L}{4}$.
**Indicación:** use la identidad $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$ y la definición geométrica de las funciones sen() y cos(), para expresar la solución como $A(t)\operatorname{sen}(\theta\, t + \phi)$, donde $A(t)$ es su amplitud y $\theta$, $\phi$ constantes adecuadas.

**Solución**

Según el ítem anterior, para $\nu > 0$ y en el caso $k^2 < w$, la solución de la EDO se puede escribir como sigue:

$$y(t) = C_1\, e^{-k\,t}\cos(\theta\, t) + C_2\, e^{-k\,t}\operatorname{sen}(\theta\, t)$$

donde

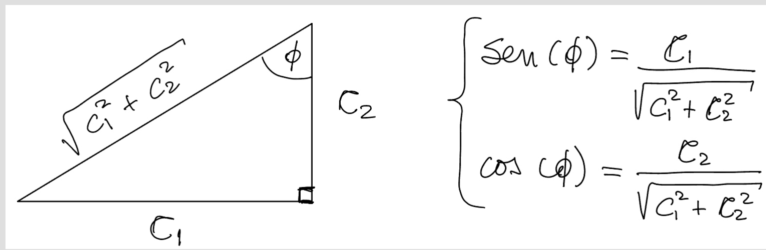
$$\theta = \sqrt{w - k^2}\,, \quad C_1 = (b - a) \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{k\,(b-a) - v_0}{\sqrt{\omega - k^2}}$$

La solución de la EDO puede ser reescrita como:

$$y(t) = e^{-k\,t}\left[C_1\, \cos(\theta\, t) + C_2\, \operatorname{sen}(\theta\, t)\right]$$

Para poder usar la identidad de la indicación, $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$, uno debe darse cuenta que si bien la expresión dentro del

paréntesis es similar a la fórmula del seno del angulo doble, nada asegura que los valores en $C_1$, $C_2$ sean representables por las funciones cos() y sen().
Siguiendo la indicación, si se dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos son de una extensión $C_1$ y $C_2$, la hipotenusa tiene una extensión $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ (ver figura siguiente).




$\leftarrow$ [0.1 pts]

Luego, si introducimos el término

$$1 = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

en la solución de la EDO, queda

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\, e^{-k\,t} \left[ \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(\theta\, t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \operatorname{sen}(\theta\, t) \right] \\
&= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\, e^{-k\,t} \left[ \operatorname{sen}(\phi)\, \cos(\theta\, t) + \cos(\phi)\, \operatorname{sen}(\theta\, t) \right] \\
&= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\, e^{-k\,t} \left[ \operatorname{sen}(\theta\, t)\, \cos(\phi) + \cos(\theta\, t)\, \operatorname{sen}(\phi) \right] \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}
\end{aligned}$$

Luego, ocupando la identidad trigonométrica de la indicación, se obtiene,

$$y(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\, e^{-k\,t} \operatorname{sen}(\theta\, t + \phi) \leftarrow \text{[0.2 pts]}$$

donde,

$$\phi = \tan^{-1}\left( \frac{C_1}{C_2} \right) \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

Para proceder a encontrar una condición para $v_0$, una forma aceptable (pero un poco conservadora) es darse cuenta que la función $|y(t)|$ esta acotada para $t > 0$. Luego, si se considera que $e^{-k\,t} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$ es función decreciente (ya que $k > 0$) y que $|\operatorname{sen}(\theta\, t + \phi)| \leq 1 \quad \forall\, \theta, \phi, t \in \mathbb{R}$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\, e^{-k\,t} |\operatorname{sen}(\theta\, t + \phi)| \\
&\leq \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\, e^{-k\,t} \\
&\leq \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}
\end{aligned}$$

Ahora se debe encontrar $v_0$ – que es parte de $C_2$ – tal que se cumpla la condición $|y(t)| \leq \dfrac{L}{4}$, lo que se impondrá en para la cota encontrada, es decir que se cumpla

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \leq \frac{L}{4} \quad \Leftrightarrow \quad C_1^2 + C_2^2 \leq \frac{L^2}{16} \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

Reemplazando $C_1$ y $C_2$ se obtiene,

$$\begin{aligned} C_1^2 + C_2^2 &\leq \frac{L^2}{16} \\ \Leftrightarrow \quad (b-a)^2 + \frac{(v_0 - k\,(b-a))^2}{\omega - k^2} &\leq \frac{L^2}{16} \\ \Leftrightarrow \quad (v_0 - k\,(b-a))^2 \leq \underbrace{(\omega - k^2)\left(\frac{L^2}{16} - (b-a)^2\right)}_{>0 \text{ ya que } |b-a|<\frac{L}{4} \text{ y } k^2<\omega} \end{aligned}$$

tomando $+\sqrt{()}$ a ambos lados de la desigualdad queda,

$$\Leftrightarrow \quad |v_0 - k\,(b-a)| \leq \sqrt{\omega - k^2}\sqrt{\frac{L^2}{16} - (b-a)^2} \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

Luego, se puede establecer la condición para $v_0$ considerando los dos posibles casos del valor absoluto.
Si se considera que $v_0 - k\,(b-a) > 0$, se obtiene una cota superior para $v_0$,

$$v_0 \leq \sqrt{\omega - k^2}\sqrt{\frac{L^2}{16} - (b-a)^2} + k\,(b-a) \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

Si ahora se considera el caso en que $v_0 - k\,(b-a) < 0$, se obtiene una cota inferior para $v_0$

$$v_0 \geq -\sqrt{\omega - k^2}\sqrt{\frac{L^2}{16} - (b-a)^2} + k\,(b-a) \quad \leftarrow \text{[0.1 pts]}$$

Luego la condición para evitar el rebalse viene dada por

$$-T + k(b-a) \leq v_0 \leq T + k(b-a)$$

donde

$$T = \sqrt{\omega - k^2}\sqrt{\frac{L^2}{16} - (b-a)^2}$$

Comentarios para la corrección

Notar que el/la estudiante podría escoger determinar el máximo y mínimo de mayor amplitud de la solución del problema de valor inicial, especificando $y'(t) = 0$ para encontrar los tiempos $t_{max}$ y $t_{min}$ donde ocurren dichos máximos y mínimos respectivamente. Luego, para evaluar las cotas, se debe determinar –con esos tiempos– la amplitud más grande y más pequeña de todas las oscilaciones de la solución, y con esos valores establecer las cotas. Esta alternativa, si bien mucho más engorrosa, es válida, por lo que se debe asignar un puntaje ad-hoc.