Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA2601, 2023-1
Profs. Jorge Aguayo, Francisco Ortega, Axel Osses, Ariel Pérez

CONTROL 2

P1. Considere, para x en el intervalo $[0, L]$, $L > 0$, $p > 0$, la siguiente EDO lineal de segundo orden a coeficientes variables

$$(1 + x^2)y'' + xy' + p^2 y = 0, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

a) **(2 pts)** Haciendo el cambio de variables $z(u) = y(\sinh(u))$, es decir $x = \sinh(u)$, muestre que la EDO anterior se reduce a la siguiente EDO lineal a coeficientes constantes

$$z'' + p^2 z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(u_L) = 0,$$

donde se define $u_L := \sinh^{-1}(L)$.

Solución: Derivando por regla de la cadena se obtiene (0.5 pto cada derivada)

$$\begin{aligned} z'(u) &= \cosh(u)y' \\ z''(u) &= \cosh^2(u)y'' + \sinh(u)y' \\ &= (1 + x^2)y'' + xy' \end{aligned}$$

de donde sustituyendo en la EDO de y se tiene (0.5 pto)

$$z'' + p^2 z = 0.$$

La condición $z(0) = y(\sinh(0)) = y(0) = 0$. (0.2 pto)
La condición $z(L) = y(\sinh(u_L)) = y(\sinh(\sinh^{-1}(L))) = y(L) = 0$. (0.3 pto)

b) **(3 pts)** Encuentre la forma general que tiene la solución de la EDO anterior en $z(u)$, y explique por qué esta solución existe para un número infinito de valores de $p = p_k$, $k \in \mathbb{Z}$ que debe determinar.

Solución: El polinomio característico es (0.5 pto)

$$\lambda^2 + p^2 = 0$$

con valores característicos (0.5 pto)

$$\lambda = \pm ip.$$

La solución está dada entonces por (1 pto)

$$z(u) = A\cos(p\,u) + B\sin(p\,u), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

De la condición $z(0) = 0$ se deduce $A = 0$. (0.2 pto)
De la condición $z(u_L) = 0$ se deduce (0.2 pto)

$$B \sin(p\, u_L) = 0$$

luego o bien $B = 0$ lo que resulta en una solución nula, o bien (0.4 pto)

$$p\, u_L = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notemos que el caso $k = 0$ incluye la solución nula.
Luego los valores de p_k para los que existe una solución son (0.2 pto)

$$p_k = \frac{2k\pi}{u_L}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) **(1 pto)** A partir de lo anterior, y usando que $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, encuentre la expresión explícita de las soluciones $y_k(x)$ de la EDO original en función de k y de L.
Indicación: Las funciones hiperbólicas $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ y $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ satisfacen la identidad $\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$.

Solución: Reemplazando lo anterior se obtiene (1 pto)

$$\begin{aligned} y_k(x) &= B \sin\left(p_k\, u\right) \\ &= B \sin\left(2k\pi \frac{\sinh^{-1}(x)}{\sinh^{-1}(L)}\right) \\ &= B \sin\left(2k\pi \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(L + \sqrt{1+L^2})}\right), \quad B \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

P2. a) **(3 pts)** Para $x > 0$, sabiendo que $y_1 = x$ e $y_2 = x\ln(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea, demuestre con el Wronskiano que éstas son linealmente independientes y usando variación de parámetros encuentre una solución particular de

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{4}{x}\ln(x).$$

Indicación: Note que $\frac{d}{dx}\ln^n(x) = n\frac{\ln^{n-1}(x)}{x}$.

Solución: Usando que el Wronskiano (0.5 escribirlo y calcularlo bien) debe ser no nulo para que haya independencia lineal (0.5 pto por esta propiedad)

$$W = \begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1 + \log x \end{vmatrix} = x + x\log x - x\log x = x \neq 0.$$

Usando la fórmula de variación de parámetros (0.5 pto conocer la fórmula o deducirla) con $\overline{Q}(x) = \frac{4}{x}\ln x$:

$$y_p \qquad = -y_1 \int \tfrac{\overline{Q} y_2}{W} + y_2 \int \tfrac{\overline{Q} y_1}{W}$$

$$
\begin{aligned}
&= -x \int \frac{\frac{4}{x}\ln x \; x\ln x}{x} + x\ln x \int \frac{\frac{4}{x}\ln x \, x}{x} \\
&= -4x \int \frac{\ln^2 x}{x} + 4x\ln x \int \frac{\ln x}{x} \\
&= -4x\frac{\ln^3 x}{3} + 4x\ln x \frac{\ln^2 x}{2} \\
&= \left(-\tfrac{4}{3} + 2\right) x\ln^3 x \\
&= \tfrac{2}{3} x \ln^3 x.
\end{aligned}
$$

(0.5 pto cada una de las integrales que se usa la indicación, 0.5 pto resto de cálculos).

b) **(3 pts)** Sean y_1 e y_2 dos soluciones con Wronskiano $W(x)$ no nulo de

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad \text{para } x \in (0, \ell)$$

tales que $y_1(0) = 0$, $y_1(\ell) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2(\ell) = 0$. Calcule $W(0)$, $W(\ell)$ y pruebe que el valor promedio de a_1:

$$M_1 := \frac{1}{\ell}\int_0^\ell a_1(x)\,dx$$

puede ser obtenido mediante la fórmula

$$M_1 = \ln\left(\frac{y_1'(0)}{y_2'(\ell)}\right)^{1/\ell}.$$

Indicación: Puede serle útil la fórmula de Abel: $W(x) = C\exp(-\int_0^x a_1(x)dx)$.

Solución: Calculemos (0.5 ptos cada determinante)

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = -y_1'(0)$$

$$W(\ell) = \begin{vmatrix} y_1(\ell) & y_2(\ell) \\ y_1'(\ell) & y_2'(\ell) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y_1'(\ell) & y_2'(\ell) \end{vmatrix} = y_2'(\ell).$$

Por la fórmula de Abel (1 pto encontrar la constante)

$$W(0) = C\exp(-\int_0^0 a_1(x)dx) = C = -y_1'(0)$$

y (0.5 pto imponer la otra condición en ℓ)

$$W(\ell) = C\exp\left(-\int_0^\ell a_1(x)dx\right) = -y_1'(0)\exp\left(-\int_0^\ell a_1(x)dx\right) = y_2'(\ell)$$

de donde

$$\ln\left(-\frac{y_2'(\ell)}{y_1'(0)}\right) = -\int_0^\ell a_1(x)dx$$

y entonces (0.5 resto de los cálculos)

$$M_1 = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell a_1(x)dx = \ln\left(-\frac{y_1'(0)}{y_2'(\ell)}\right)^{1/\ell}.$$

P3. a) **(3 pts)** Usando el método de constantes indeterminadas, dé la forma de la solución homogénea y una solución particular (es decir sin evaluar las constantes) de

$$\begin{aligned}(D-2)^2(D^2+1)^2\,y &= x^2e^{3x}\\ D^3(D^2-6D+10)^2\,y &= x^2\cos(x)e^{3x}\end{aligned}$$

Solución: En el primer caso los valores característicos son $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad $m_1 = 2$, $\lambda_2 = +i$ de multiplicidad $m_2 = 2$ y $\lambda_3 = -i$ de multiplicidad $m_3 = 2$. Por ello la solución homogénea tiene la forma:

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3\cos(x) + C_4\sin(x) + C_5x\cos(x) + C_6x\sin(x).$$

(0.3 ptos parte λ_1, 0.3 ptos parte λ_2 y λ_3)
La solución particular no es resonante con el lado derecho: polinomio de grado $k_0 = 2$ y asociado a $\lambda_0 = 3$, por lo que una solución particular se busca de la forma

$$y_p = e^{3x}(A_0 + A_1x + A_2x^2).$$

(0.3 ptos darse cuenta que es resonante, 0.3 ptos expresión correcta)
En el segundo caso los valores característicos son $\lambda_1 = 0$ de multiplicidad $m_1 = 3$, $\lambda_2 = 3 + i$ de multiplicidad $m_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3 - i$ de multiplicidad $m_3 = 2$. La solución homogénea tiene entonces la forma:

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x}\sin(x) + C_5e^{3x}\cos(x) + C_6xe^{3x}\sin(x) + C_7xe^{3x}\cos(x).$$

(0.3 ptos parte λ_1, 0.3 ptos parte λ_2 y λ_3)
La solución particular es resonante con el lado derecho: polinomio de grado $k_0 = 2$ y asociado a $\lambda_0 = 3 \pm i$, por lo que una solución particular se busca de la forma

$$y_p = x^2\left(e^{3x}(A_0 + A_1x + A_2x^2)\cos(x) + e^{3x}(B_0 + B_1x + B_2x^2)\sin(x)\right)$$

donde el factor x^2 es el factor de resonancia.
(0.6 ptos darse cuenta que es resonante, 0.6 ptos expresión correcta)

b) La ecuación de Schrödinger para $x > 0$

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \left(k + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)y = 0$$

describe las oscilaciones en los electrones del átomo de hidrógeno donde k y l son números enteros. Esta ecuación se puede escribir como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

1) **(2 pts)** Haciendo $y(x) = u(x)v(x)$ y anulando el coeficiente de u' que aparece, determine v (considere el caso en que $v \neq 0$) y deduzca que la ecuación original resulta equivalente a

$$u'' + r(x)u = 0, \qquad r(x) = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'.$$

Solución: Reemplazando en la ecuación queda: (0.2 ptos)

$$u''v + uv'' + 2u'v' + pu'v + puv' + quv = 0$$

Anulando el coeficiente de u' se obtiene (0.2 ptos)

$$2v' + pv = 0$$

de donde por separación de variables (asumimos que $v \neq 0$) (0.3 ptos)

$$\frac{v'}{v} = -\frac{p(x)}{2}$$

resolviendo (0.3 ptos)

$$\log|v| = -\frac{1}{2}\int p(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

y reemplazando $p(x) = 2/x$ se obtiene (0.2 ptos)

$$v(x) = \pm K \exp\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad K = e^C > 0.$$

Reemplazando la ecuación queda (0.2 ptos)

$$u''v + uv'' + puv' + quv = 0$$

dividiendo por v

$$u'' + u\frac{v''}{v} + pu\frac{v'}{v} + qu = 0$$

y usando que (0.4 ptos)

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{p}{2}v, \quad \text{esto es} \quad \frac{v'}{v} = -\frac{p}{2} \\ v'' &= -\frac{1}{2}(p'v + pv') = -\frac{1}{2}(p'v - \frac{p^2}{2}v), \quad \text{esto es} \quad \frac{v''}{v} = -\frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

se obtiene

$$u'' + u\left(-\frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4}\right) + pu\left(-\frac{p}{2}\right) + qu = 0$$

simplificando (0.2 ptos)

$$u'' + \left(q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}\right)u = 0.$$

2) **(1 pto)** Sabiendo que la solución u puede oscilar si $r(x) > 0$ para todo x, encuentre una condición suficiente entre k y l para que hayan oscilaciones.

Solución:

La condición es (0.2 ptos calcular bien $r(x)$, 0.2 ptos imponer $r > 0$):

$$\begin{aligned} r(x) &= q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2} \\ &= k + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{4}{4x^2} + \frac{2}{2x^2} \\ &= k + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2} \\ &> 0 \quad \text{para } x > 0 \end{aligned}$$

Lo que lleva a que la parábola (0.4 ptos darse cuenta que es una parábola o ec. de 2do grado)

$$kx^2 + 2x - l(l+1) > 0 \quad \text{para } x > 0$$

y esto ocurre si el discriminante (0.2 ptos)

$$4 - 4kl(l+1) < 0$$

es decir si

$$kl(l+1) > 1.$$