Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y periódicas con periodo $T > 0$, o sea,

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad a\,(t+T) = a\,(t) \qquad b\,(t+T) = b\,(t)$$

Considere la ecuación diferencial

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{1}$$

1. Demuestre que el problema de Cauchy dado por

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2}$$

posee solución única para todo $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Sea u una solución de la ecuación (1) tal que $u\,(0) = u\,(T)$. Demuestre que $\varphi(t) = u(t) - u(t)$ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a(t)\varphi(t) \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

3. Sea u solución de la ecuación (1). Aplicando los resultados de las partes anteriores, pruebe que u es periódica con periodo $T > 0$ si y solo si $u\,(0) = u\,(T)$.
Indicación: Analice la existencia y unicidad de solución de la ecuación (3).

Solución

1. Sea $f(t) = a(t)x + b(t)$, para $(t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se tiene que f es continua con respecto a t, ya que a y b son funciones continuas. Ahora, para $t, x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= |a(t)x + b(t) - (a(t)y + b(t))| \\ &= |a(t)|\,|x - y| \end{aligned}$$

donde existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |a(t)| = \sup_{x \in [0,T]} |a(t)| = \max_{x \in [0,T]} |a(t)| = M$$

gracias a que a es periódica en su dominio, además de continua y acotada en $[0, T]$. Entonces,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq M\,|x - y|$$

y f es globalmente Lipschitz con respecto a la variable x. Por lo tanto, el Teorema de Existencia y Unicidad permite asegurar que el problema de Cauchy posee solución única para todos $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

- 0.5 puntos. Identifica la función f del lado derecho y que es continua respecto a t.
- 0.5 puntos. Prueba que a es acotada en su dominio.
- 1.0 punto. Prueba que f es Lipschitz respecto a x.
- 1.0 punto. Concluye usando el Teorema de Existencia y Unicidad.

2. Sea $\varphi(t) = u(t) - u(t)$. Dado que $u\,(0) = u\,(T)$, se tiene que $\varphi\,(0) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= u'(t+T) - u'(t) \\ &= a(t+T)u(t+T) + b(t+T) - (a(t)u(t) + b(t)) \\ &= a(t)u(t+T) - a(t)u(t) \\ &= a(t)\,(u(t+T) - u(t)) \\ &= a(t)\varphi(t) \end{aligned}$$

Entonces, φ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a(t)\varphi(t) \\ \varphi\,(0) &= 0 \end{aligned}$$

- 0.5 puntos. Define la condición inicial del problema de Cauchy.
- 1.0 punto. Construye la parte derecha del problema de Cauchy.

3. Claramente, si u es solución periódica de la ecuación, entonces $u(0) = u(T)$. Ahora, se procede con la implicancia en el sentido contrario.
   Si ahora se supone que $u(0) = u(T)$, la segunda parte permite afirmar que $\varphi(t) = u(t) - u(t)$ es solución de (3). Como $\varphi_1 \equiv 0$ es una solución trivial de (3), la primera parte permite concluir que la solución de (3) es única. Entonces, $\varphi \equiv 0$. Por lo tanto,

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad \varphi(t) = u(t+T) - u(t) = 0 \Rightarrow u(t+T) = u(t)$$

   probando que u es periódica con periodo T.

   - 0.5 puntos. Muestra la implicacia trivial.
   - 0.5 puntos. Muestra que φ es solución de (3).
   - 0.5 puntos. Muestra que $\varphi \equiv 0$ es la única solución y conlcuye.

PAUTA PREGUNTA 2 - CONTROL 2

Considere la ecuación diferencial lineal de orden superior

$$t^3 y''' + 4t^2 y'' + 10ty' - 10y = 169t\ln(t); \quad t \in]0, +\infty[\tag{1}$$

a) Muestre que el cambio de variable $t = e^u$, $z(u) = y(e^u)$ lleva la ecuación (1) en

$$z''' + z'' + 8z' - 10z = 169ue^u.$$

Respuesta: Con el cambio de variable, la ecuación (1) queda:

$$e^{3u}y'''(e^u) + 4e^{2u}y''(e^u) + 10e^u y'(e^u) - 10y(e^u) = 169ue^u. \tag{2}$$

Calculamos las derivadas de z con respecto a u considerando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} z'(u) &= y'(e^u)e^u \\ z''(u) &= y''(e^u)e^{2u} + y'(e^u)e^u \\ z'''(u) &= y'''(e^u)e^{3u} + 3y''(e^u)e^{2u} + y'(e^u)e^u. \end{aligned}$$

Despejando:

$$\begin{aligned} e^u y'(e^u) &= z'(u) \\ e^{2u}y''(e^u) &= z''(u) - z'(u) \\ e^{3u}y'''(e^u) &= z'''(u) - 3(z''(u) - z'(u)) - z'(u) \\ &= z'''(u) - 3z''(u) + 2z'(u). \end{aligned}$$

Reemplazando en (2):

$$\begin{aligned} (z'''(u) - 3z''(u) + 2z'(u)) + 4(z''(u) - z'(u)) + 10z'(u) - 10z(u) &= 169ue^u \\ z'''(u) + z''(u) + 8z'(u) - 10z(u) &= 169ue^u, \end{aligned}$$

que es la ecuación pedida.

Distribución de puntajes:

- Se calculan las derivadas de la nueva variable z con respecto a u, considerando la regla de la cadena. (1,0 pts).
- Se reemplazan los cálculos en la ecuación original, obteniendo correctamente la ecuación solicitada (0,5 pts).

b) Encuentre todas las soluciones $y(t)$ de la ecuación homogénea asociada a (1). Muestre que hay infinitas soluciones $y(t)$ de esta ecuación homogénea tales que $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Respuesta: Consideramos la ecuación homogénea resultante del cambio de variable

$$z''' + z'' + 8z' - 10z = 0. \tag{3}$$

Su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 10$. Notamos que $p(1) = 0$, y por lo tanto $p(\lambda) = (\lambda - 1)q(\lambda)$, para algún polinomio $q(\lambda)$.

Haciendo división de polinomios podemos concluir que

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda^2 + 2\lambda + 10)(\lambda - 1) \\ &= (\lambda + 1 - 3i)(\lambda + 1 + 3i)(\lambda - 1), \end{aligned}$$

pues $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ para $\lambda = -1 \pm 3i$.

Concluimos que e^u, $e^{-u}\cos(3u)$ y $e^{-u}\operatorname{sen}(3u)$ son tres soluciones l.i. de (3), y por lo tanto la solución general de (3) es

$$z(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}\cos(3u) + C_3 e^{-u}\operatorname{sen}(3u)$$

que, recuperando el cambio de variable, queda

$$y(t) = C_1 t + C_2 \frac{\cos(3\ln t)}{t} + C_3 \frac{\operatorname{sen}(3\ln t)}{t}.$$

Para ver que hay infinitas soluciones $y(t)$ tales que $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ se puede tomar, <u>por ejemplo</u>, todas las soluciones múltiplos de $\cos(3\ln t)/t$ (que son infinitas).

$$y(t) = C_2 \frac{\cos(3\ln t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

pues $\cos(3\ln t)$ es acotado.

Distribución de puntajes:

- Expresa el polinomio característico y le encuentra una raíz $(0,3$ pts$)$.
- Factoriza el polinomio característico y encuentra todas las raíces (no es necesario que llegue hasta la factorización compleja, con la real basta, es decir, cuadrático y lineal reales) $(0,3$ pts$)$.
- Usa la raíces para encontrar una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea $(0,8$ pts$)$.
- Recupera el cambio de variable para obtener la solución general pedida $(0,3$ pts$)$.
- Exhibe infinitas soluciones que se anulan en el infinito, explicando por qué $(0,3$ pts$)$.

c) Encuentre todas las soluciones $y(t)$ de (1). Muestre que hay infinitas soluciones $y(t)$ de (1) tales que $y(1) = 0$.

[Indicación: Es posible resolver la ecuación obtenida en la parte *a)* mediante el método de coeficientes indeterminados.]

Solución: La ecuación obtenida en la parte *a)*, aprovechando la factorización del polinomio característico de la parte anterior, se puede escribir

$$\begin{aligned} (D+1-3i)(D+1+3i)(D-1)z &= 169ue^u \qquad /(D-1)^2 \\ (D+1-3i)(D+1+3i)(D-1)^3 z &= 0, \end{aligned}$$

y esta última ecuación tiene soluciones l.i. e^u, ue^e, u^2e^u, $e^{-u}\cos(3u)$, y $e^{-u}\operatorname{sen}(3u)$. Las únicas que no son soluciones de la homogénea asociada a la primera ecuación son ue^u y u^2e^u.

Una solución particular es, por tanto, de la forma

$$z_p(u) = Aue^u + Bu^2e^u = (Au + Bu^2)e^u.$$

Para encontrar las constantes indeterminadas A y B veremos dos alternativas:

Alternativa 1: Usando propiedades de operadores. Reemplazamos en la ecuación original (Observación: no es absolutamente necesario que el operador esté factorizado completamente en los complejos)

$$\begin{aligned} (D+1-3i)(D+1+3i)(D-1)z_p(u) &= 169ue^u \\ (D+1-3i)(D+1+3i)(D-1)(Au+Bu^2)e^u &= 169ue^u \\ e^u(D+2-3i)(D+2+3i)D(Au+Bu^2) &= 169ue^u \\ (D+2-3i)(D+2+3i)D(Au+Bu^2) &= 169u \\ (D+2-3i)(D+2+3i)(A+2Bu) &= 169u \\ (D^2+4D+13)(A+2Bu) &= 169u \\ D^2(A+2Bu)+4D(A+2Bu)+13(A+2Bu) &= 169u \\ 8B+13A+26Bu &= 169u. \end{aligned}$$

Y así $13A+8B=0$ y $26B=169$, de donde obtenemos $B=13/2$ y $A=-4$. Reemplazamos en $z_p(u)$ y concluimos que la ecuación general de la ecuación obtenida en la parte *a)* es

$$z(u) = (-4u + 13u^2/2)e^u + C_1e^u + C_2e^{-u}\cos(3u) + C_3e^{-u}\operatorname{sen}(3u).$$

Recuperando el cambio de variables, obtenemos la solución general de (1):

$$y(t) = \left(-4\ln t + \frac{13}{2}(\ln t)^2\right)t + C_1t + C_2\frac{\cos(3\ln t)}{t} + C_3\frac{\operatorname{sen}(3\ln t)}{t}.$$

Alternativa 2: Calculamos primero las derivadas de $z_p(u)$:

$$\begin{aligned}
z_p(u) &= (Au + Bu^2)e^u \\
z_p'(u) &= (A + 2Bu)e^u + (Au + Bu^2)e^u \\
&= (A + (A + 2B)u + Bu^2)e^u \\
z_p''(u) &= (A + 2B + 2Bu)e^u + (A + (A + 2B)u + Bu^2)e^u \\
&= (2A + 2B + (A + 4B)u + Bu^2)e^u \\
z_p'''(u) &= (A + 4B + 2Bu)e^u + (2A + 2B + (A + 4B)u + Bu^2)e^u \\
&= (3A + 6B + (A + 6B)u + Bu^2)e^u.
\end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación sin factorizar

$$\begin{aligned}
z_p'''(u) + z_p''(u) + 8z_p'(u) - 10z_p(u) &= 169ue^u \\
(3A + 6B + (A + 6B)u + Bu^2)e^u & \\
+(2A + 2B + (A + 4B)u + Bu^2)e^u & \\
+8(A + (A + 2B)u + Bu^2)e^u & \\
-10(Au + Bu^2)e^u &= 169ue^u \\
(13A + 8B + 26Bu)e^u &= 169ue^u.
\end{aligned}$$

Acá también obtenemos $13A+8B = 0$ y $26B = 169$ y, por lo tanto, $B = 13/2$ y $A = -4$. Procedemos igual que en la alternativa anterior para concluir que

$$y(t) = \left(-4\ln t + \frac{13}{2}(\ln t)^2\right)t + C_1 t + C_2\frac{\cos(3\ln t)}{t} + C_3\frac{\operatorname{sen}(3\ln t)}{t}.$$

Para ver que hay infinitas soluciones $y(t)$ de (1) tales que $y(1) = 0$, evaluamos la ecuación anterior en $t = 1$.

$$\begin{aligned}
y(1) &= \left(-4\ln(1) + \frac{13}{2}(\ln(1))^2\right) + C_1 + C_2\frac{\cos(3\ln(1))}{1} + C_3\frac{\operatorname{sen}(3\ln(1))}{1} \\
&= C_1 + C_2.
\end{aligned}$$

Cualquier elección de valores tales que $C_1 + C_2 = 0$ permiten que $y(1) = 0$. Se pueden elegir, por ejemplo, las siguientes infinitas soluciones:

$$y(t) = \left(-4\ln t + \frac{13}{2}(\ln t)^2\right)t + t - \frac{\cos(3\ln t)}{t} + C_3\frac{\operatorname{sen}(3\ln t)}{t}.$$

Distribución de puntajes:

- Encuentra un candidato a solución particular, justificando correctamente $(0,4$ pts$)$.
- Reemplaza correctamente el candidato en la ecuación correspondiente $(0,2$ pts$)$.
- Desarrolla el reemplazo y encuentra los coeficientes indeterminados $(0,5$ pts$)$.
- Expresa la solución como la suma de la solución particular y todas las soluciones

de la ecuación homogénea asociada (0, 7 pts).

- Recupera el cambio de variable para entregar la solución general pedida (0, 3 pts).
- Exhibe infinitas soluciones que se anulan en $t = 1$, explicando por qué (0, 4 pts).

PAUTA PREGUNTA 3 - CONTROL 2

Considere la ecuación de segundo orden homogénea

$$v'' - \frac{1}{s}v' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v = 0, \quad s \in]0,1[\tag{1}$$

a) Compruebe que $v_1(s) = 1/(1-s^2)$ es solución de (1).

Respuesta:

$$\begin{aligned} v_1(s) &= (1-s^2)^{-1} \\ v_1'(s) &= 2s(1-s^2)^{-2} \\ v_1''(s) &= 2(1-s^2)^{-2} + 8s^2(1-s^2)^{-3}. \end{aligned}$$

Reemplazamos

$$\begin{aligned} v_1'' - \frac{1}{s}v_1' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v_1 &= 2(1-s^2)^{-2} + 8s^2(1-s^2)^{-3} - 2(1-s^2)^{-2} - 8s^2(1-s^2)^{-3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- Derivadas de v_1 (0,3 pts).
- Reemplazar coorrectamente y concluir (0,2 pts).

b) Encuentre una solución $v_2(s)$ de (1) que sea l.i. con $v_1(s)$, y con ello todas las soluciones $v(s)$ de (1).

Respuesta: Utilizando la fórmula de Abel tenemos

$$\begin{aligned} W(v_1, v_2) &= Ce^{\int 1/s\, ds} \\ \begin{vmatrix} (1-s^2)^{-1} & v_2 \\ 2s(1-s^2)^{-2} & v_2' \end{vmatrix} &= Cs \\ v_2'(1-s^2)^{-1} - 2v_2 s(1-s^2)^{-2} &= Cs \\ \frac{v_2'(1-s^2)^{-1} - 2v_2 s(1-s^2)^{-2}}{(1-s^2)^{-2}} &= \frac{Cs}{(1-s^2)^{-2}} \\ \left(\frac{v_2}{(1-s^2)^{-1}}\right)' &= Cs(1-s^2)^2 \\ v_2(1-s^2) &= C\int s(1-s^2)^2\, ds \\ &= -C(1-s^2)^3/6 + K \\ v_2 &= -\frac{C}{6}(1-s^2)^2 + \frac{K}{1-s^2}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, con $C = -6$ y $K = 0$, una solución l.i. sería $v_2(s) = (1-s^2)^2$.

Por lo tanto, la solución general de (1) es:

$$v(s) = \frac{C_1}{1-s^2} + C_2(1-s^2)^2.$$

Observación: Se puede obtener el mismo resultado aplicando la fórmula de Liouville.

Distribución de puntajes:

- Plantea la fórmula de Abel o Liouville para resolver el problema con los elementos correctos. (1, 0 pts).
- Desarrolla y elige una solución v_2 l.i. (1, 0 pts).
- Escribe la solución general de la ecuación (1) (0, 5 pts).

c) Encuentre todas las soluciones $v(s)$ de

$$v'' - \frac{1}{s}v' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v = \frac{s^4}{1-s^2}, \quad s \in]0,1[.$$

Respuesta: Utilizamos método de variación de parámetros. La matriz fundamental $\Phi(s)$ y el vector de términos libres $B(s)$ quedan

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} (1-s^2)^{-1} & (1-s^2)^2 \\ 2s(1-s^2)^{-2} & -4s(1-s^2) \end{pmatrix}$$
$$B(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ s^4(1-s^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\Phi(s)^{-1} = -\frac{1}{6s}\begin{pmatrix} -4s(1-s^2) & -(1-s^2)^2 \\ -2s(1-s^2)^{-2} & (1-s^2)^{-1} \end{pmatrix}$$
$$\Phi(s)^{-1}B(s) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} s^3(1-s^2) \\ -s^3(1-s^2)^{-2} \end{pmatrix}.$$

Una solución particular es de la forma

$$v_p(s) = F_1(s)v_1(s) + F_2(s)v_2(s),$$

donde

$$\begin{aligned}
F_1(s) &= \frac{1}{6}\int s^3(1-s^2)\,ds \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{s^4}{4}-\frac{s^6}{6}\right) \\
&= \frac{s^4}{72}(3-2s^2). \\
F_2(s) &= -\frac{1}{6}\int \frac{s^3}{(1-s^2)^2}\,ds \\
&= \frac{1}{12}\int \frac{s^2\cdot(-2s)\,ds}{(1-s^2)^2} \\
& u = 1-s^2; du = -2s\,ds; s^2 = 1-u \\
&= \frac{1}{12}\int \frac{(1-u)\,du}{u^2} \\
&= \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{u}-\ln|u|\right) \\
&= -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{1-s^2}+\ln(1-s^2)\right).
\end{aligned}$$

Todas las soluciones se escribirán como suma de la solución particular $v_p(s)$ encontrada y todas las soluciones de la ecuación homogénea (1).

$$v(s) = \frac{s^4(3-2s^2)}{72(1-s^2)} - \frac{1-s^2+(1-s^2)^2\ln(1-s^2)}{12} + \frac{C_1}{1-s^2} + C_2(1-s^2)^2$$

Observación: Las funciones $F_1(s)$ y $F_2(s)$ también se pueden obtener mediante las fórmulas

$$F_1(s) = \int \frac{-v_2(s)q(s)}{W(v_1(s),v_2(s))}\,ds; \quad F_2(s) = \int \frac{v_1(s)q(s)}{W(v_1(s),v_2(s))}\,ds,$$

donde $v_1(s) = (1-s^2)^{-1}$, $v_2(s) = (1-s^2)^2$ y $q(s) = s^4(1-s^2)^{-1}$. En este caso se tiene el wronskiano $W(v_1(s),v_2(s)) = -6s$.

Distribución de puntajes:

- Expresa la solución particular como combinación de las soluciones de la ecuación homogénea, usando F_1 y F_2 (0,5 pts).
- Plantea las integrales para calcular F_1 y F_2, encontrando explícitamente cada integrando (0,8 pts).
- Calcula funciones F_1 y F_2 (1,2 pts).
- Concluye correctamente la solución particular y la solución general (0,5 pts).