PAUTA CONTROL 2 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 2021

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JESSICA TRESPALACIOS Y NICOLÁS VALENZUELA

Indicaciones importantes:

1. Lea cuidadosamente cada párrafo del enunciado antes de intentar resolverlo.
2. Escriba sus desarrollos lo más detallada y nítidamente posibles; esto es muy relevante.
3. Posee dos horas para resolver este control, más dos horas adicionales para escanearlo.
4. Puede usar sus apuntes y material docente de cátedra y auxiliar.

Un modelo muy simplificado de acción de una vacuna sobre una población es el siguiente:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) + e^{-2t}. \end{cases}$$

donde $x_1(t)$ es la población sin vacunar y $x_2(t)$ es la población ya vacunada.

Parte 1. Usando matriz exponencial y la fórmula de Duhamel, encuentre todas las soluciones de (V). Describa lo que sucede cuando $t \to +\infty$ en este caso.

Indicación: Si escoge los vectores propios ortonormales, entonces la matriz P correspondiente satisface $P^{-1} = P^T$.

Solución. Podemos escribir (V) como $X'(t) = AX(t) + B(t)$, donde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}. \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

Calculemos e^{tA}. Para ello, veamos los valores propios de A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2 - 1,$$

de donde $(1+\lambda)^2 = 1$, es decir, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. (0.5 ptos.)

Como los valores propios son diferentes, la matriz A es diagonalizable. (0.5 ptos.)

Además, si $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, entonces

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}. \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

Los vectores propios son, para $\lambda_1 = 0$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \implies -x_1 + x_2 = 0 \implies x_2 = x_1,$$

con x_1 libre. Luego,

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

es vector propio de norma 1. Para $\lambda_2 = -2$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \implies x_1 + x_2 = 0 \implies x_2 = -x_1,$$

con x_1 libre. Luego,

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

es vector propio de norma 1, ortogonal a v_1. Por lo mismo,

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P. \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

La matriz e^{tA} viene dada por

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-2t} & 1-e^{-2t} \\ 1-e^{-2t} & 1+e^{-2t} \end{pmatrix}. \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

La fórmula de Duhamel nos dice que toda solución viene dada por

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds, \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

con $X_0 = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2$ cualquier vector fijo. Tenemos

$$e^{tA}X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-2t} & 1-e^{-2t} \\ 1-e^{-2t} & 1+e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+e^{-2t})C_1 + (1-e^{-2t})C_2 \\ (1-e^{-2t})C_1 + (1+e^{-2t})C_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

redefiniendo C_1 y C_2. Por otro lado,

$$e^{(t-s)A}B(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-2(t-s)} & 1-e^{-2(t-s)} \\ 1-e^{-2(t-s)} & 1+e^{-2(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2s} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-2s}-e^{-2t} \\ e^{-2s}+e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds = \frac{1}{2}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s}-e^{-2t} \\ e^{-2s}+e^{-2t} \end{pmatrix} ds = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) - te^{-2t} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) + te^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

Finalmente, la solución general viene dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} (1+e^{-2t})C_1 + (1-e^{-2t})C_2 \\ (1-e^{-2t})C_1 + (1+e^{-2t})C_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) - te^{-2t} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) + te^{-2t} \end{pmatrix},$$

que converge cuando $t \to +\infty$ a la cantidad

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(C_1 + C_2 + \frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

Es decir, el sistema converge a un caso constante que depende de los datos iniciales, y está trasladado por 1/4 en ambas componentes.

Parte 2. Suponga ahora que la aparición de una nueva variante se ve reflejada por una delta en $a > 0$:

$$\text{(Vo)} \qquad \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + \delta_a(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) + e^{-2t}. \end{cases}$$

Usando transformada de Laplace, encuentre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ si $x_1(0) = m_1$, $x_2(0) = m_2$ dados. Describa la diferencia entre este resultado y el de la parte 1.

Solución. Aplicaremos transformada de Laplace a cada ecuación en (Vo). Tenemos

$$\begin{cases} sL_1(s) - m_1 = -L_1(s) + L_2(s) + e^{-as} \\ sL_2(s) - m_2 = L_1(s) - L_2(s) + \frac{1}{s+2}. \end{cases}$$

donde $L_1(s) = L[x_1(t)](s)$ y $L_2(s) = L[x_2(t)](s)$. Luego,

$$\begin{cases} (s+1)L_1(s) - L_2(s) = m_1 + e^{-as} \\ -L_1(s) + (s+1)L_2(s) = m_2 + \frac{1}{s+2}. \end{cases} \qquad \text{(1 pto.)}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $(s+1)$ y sumándola a la primera, obtenemos

$$((s+1)^2 - 1)L_2(s) = m_2(1+s) + \frac{s+1}{s+2} + m_1 + e^{-as},$$

de donde

$$L_2(s) = \frac{m_2(1+s)}{(s+1)^2-1} + \frac{s+1}{((s+1)^2-1)(s+2)} + \frac{m_1}{(s+1)^2-1} + \frac{e^{-as}}{(s+1)^2-1}. \qquad \text{(1 pto.)}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} L_1(s) &= (s+1)L_2(s) - m_2 - \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{m_2(1+s)^2}{(s+1)^2-1} - m_2 + \frac{(s+1)^2}{((s+1)^2-1)(s+2)} \\ &\quad - \frac{1}{s+2} + \frac{m_1(s+1)}{(s+1)^2-1} + \frac{(s+1)e^{-as}}{(s+1)^2-1} \\ &= \frac{m_2}{(s+1)^2-1} + \frac{1}{((s+1)^2-1)(s+2)} + \frac{m_1(s+1)}{(s+1)^2-1} + \frac{(s+1)e^{-as}}{(s+1)^2-1}. \qquad \text{(0.5 ptos.)} \end{aligned}$$

Ahora, usando las propiedades de la Transformada de Laplace, tenemos

$$\begin{aligned} L_2(s) &= \frac{m_2(1+s)}{(s+1)^2-1} + \frac{s+1}{((s+1)^2-1)(s+2)} + \frac{m_1}{(s+1)^2-1} + \frac{e^{-as}}{(s+1)^2-1} \\ &= m_2 L[\cosh t](s+1) + L[\cosh t](s+1)L[e^{-2t}](s) \\ &\quad + m_1 L[\sinh t](s+1) + L[\sinh t](s+1)e^{-as} \\ &= m_2 L[e^{-t}\cosh t](s) + L[e^{-t}\cosh t](s)L[e^{-2t}](s) \\ &\quad + L[m_1 e^{-t}\sinh t](s) + L[e^{-t}\sinh t](s)e^{-as} \\ &= L\Big[m_2 e^{-t}\cosh t + (e^{-t}\cosh t) \star e^{-2t} + m_1 e^{-t}\sinh t + e^{-(t-a)}\sinh(t-a)H_a(t)\Big](s). \end{aligned}$$

Luego,

$$x_2(t) = \frac{1}{2}m_2(1+e^{-2t}) + (e^{-t}\cosh t) \star e^{-2t} + \frac{1}{2}m_1(1-e^{-2t}) + \frac{1}{2}(1-e^{-2(t-a)})H_a(t). \qquad \text{(1 pto.)}$$

Calculando $(e^{-t}\cosh t)\star e^{-2t}$,

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-2(t-s)}e^{-s}\cosh s ds &= \frac{1}{2}\int_0^t e^s e^{-2t}(e^s+e^{-s})ds\\ &= \frac{1}{2}e^{-2t}\int_0^t (e^{2s}+1)ds = \frac{1}{2}e^{-2t}\left(\frac{1}{2}(e^{2t}-1)+t\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(1-e^{-2t})+te^{-2t}\right). \qquad \text{(0.5 ptos.)}\end{aligned}$$

Nos queda pues que, redefiniendo m_1 y m_2,

$$x_2(t) = m_2(1+e^{-2t}) + m_1(1-e^{-2t}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(1-e^{-2t})+te^{-2t}\right) + \frac{1}{2}(1-e^{-2(t-a)})H_a(t).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}L[x_1](t) &= \frac{m_2}{(s+1)^2-1} + \frac{1}{((s+1)^2-1)(s+2)} + \frac{m_1(s+1)}{(s+1)^2-1} + \frac{(s+1)e^{-as}}{(s+1)^2-1}\\ &= m_2L[\sinh t](s+1) + L[\sinh t](s+1)L[e^{-2t}](s)\\ &\quad + m_1L[\cosh t](s+1) + L[\cosh t](s+1)e^{-as}\\ &= m_2L[e^{-t}\sinh t](s) + L[e^{-t}\sinh t](s)L[e^{-2t}](s)\\ &\quad + m_1L[e^{-t}\cosh t](s) + L[e^{-t}\cosh t](s)e^{-as}\\ &= m_2L[e^{-t}\sinh t](s) + L[(e^{-t}\sinh t)\star e^{-2t}](s)\\ &\quad + m_1L[e^{-t}\cosh t](s) + L[e^{-(t-a)}\cosh(t-a)H_a(t)](s)\\ &= L[m_2e^{-t}\sinh t + (e^{-t}\sinh t)\star e^{-2t} + m_1e^{-t}\cosh t + e^{-(t-a)}\cosh(t-a)H_a(t)](s)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_1(t) = \frac{1}{2}m_2(1-e^{-2t}) + \frac{1}{2}m_1(1+e^{-2t}) + (e^{-t}\sinh t)\star e^{-2t} + \frac{1}{2}(1+e^{-(t-a)})H_a(t). \qquad \text{(1 pto.)}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}(e^{-t}\sinh t)\star e^{-2t} &= \int_0^t e^{-2(t-s)}e^{-s}\sinh s ds\\ &= \frac{1}{2}\int_0^t e^s e^{-2t}(e^s-e^{-s})ds\\ &= \frac{1}{2}e^{-2t}\int_0^t (e^{2s}-1)ds = \frac{1}{2}e^{-2t}\left(\frac{1}{2}(e^{2t}-1)-t\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(1-e^{-2t})-te^{-2t}\right). \qquad \text{(0.5 ptos.)}\end{aligned}$$

Finalmente, con respecto a la parte anterior, a partir de $t \geq a$, se agregan los nuevos términos $\frac{1}{2}(1+e^{-(t-a)})$ en $x_1(t)$, y $\frac{1}{2}(1-e^{-2(t-a)})$ en $x_2(t)$, que representan un alza en ambas variables, vacunados y no vacunados. (0.5 ptos.)