# PAUTA CONTROL 2

**P1.-** Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante fija. Considere el siguiente sistema lineal no homogéneo:

$$\begin{aligned} x' &= (2a+1)x - (2a+2)y + 3e^{-2t} - 2te^{-t} \\ y' &= 2ax - (2a+1)y - 2te^{-t} \end{aligned}$$

*(a)* Encuentre $A$ y $B(t)$ de modo que el sistema adopte la forma $X' = AX + B(t)$

**Solución:** Tomando $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, podemos escribir el sistema como:

$$X'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2a+1 & -(2a+2) \\ 2a & -(2a+1) \end{bmatrix}}_{A} X(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2te^{-t} \\ -2te^{-t} \end{bmatrix}}_{B(t)}. \tag{1}$$

**Puntaje:**

- Establece el vector $X$ (ó $X(t)$). (0,2 pts.)
- Desarrolla vectorialmente identificando $A$ y $B(t)$. (0,3 pts.)

*(b)* Calcule $e^{tA}$.

**Solución:** El polinomio característico de la matriz $A$ está dado por:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - (2a+1) & 2a+2 \\ -2a & \lambda + (2a+1) \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2a+1)^2 + 2a(2a+2) = \lambda^2 - 1, \tag{2}$$

cuyos ceros (valores propios de $A$) son $1$ y $-1$.
Resolvemos los sistemas de ecuaciones $(A \pm I)V = 0$, para calcular los vectores propios

asociados. Obtenemos, en cada caso:

$$\boxed{\lambda = +1} \qquad \begin{bmatrix} 2a & -(2a+2) \\ 2a & -(2a+2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 2au - (2a+2)v = 0$$

$$\implies E_{+1}(A) = \left\langle \begin{bmatrix} a+1 \\ a \end{bmatrix} \right\rangle \tag{3}$$

$$\boxed{\lambda = -1} \qquad \begin{bmatrix} 2a+2 & -(2a+2) \\ 2a & -2a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies u - v = 0$$

$$\implies E_{-1}(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{4}$$

con lo que obtenemos que la matriz $A$ se diagonaliza como $A = PDP^{-1}$ con:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & a+1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Por ende, la matriz exponencial de $A$ queda dada por:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (a+1)e^t - ae^{-t} & (a+1)(e^{-t} - e^t) \\ a(e^t - e^{-t}) & (a+1)e^{-t} - ae^t \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

**Puntaje:**

- Calcula el polinomio característico. (0,2 pts.)
- Calcula los valores propios. (0,2 pts.)
- Para cada valor propio escoge un vector propio. (0,3 pts.)
- Diagonaliza la matriz $A$. Explicita $P, P^{-1}$ y $D$. (0,6 pts.)
- Encuentra la forma diagonalizada de la matriz $e^{tA}$. (0,5 pts.)
- Desarrolla la forma diagonalizada para encontrar $e^{tA}$. (0,2 pts.)

*(c)* Encuentre la solución general del sistema.

**Solución:** Por el método de variación de parámetros, a la ecuación (1) le buscamos una solución particular de la forma $X_{\mathrm{p}}(t) = e^{tA}F(t)$, donde $F$ es una función vectorial que satisface la igualdad:

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{-tA}B(t) \\ &= \begin{bmatrix} (a+1)e^{-t} - ae^t & (a+1)(e^t - e^{-t}) \\ a(e^{-t} - e^t) & (a+1)e^t - ae^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2te^{-t} \\ -2te^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(a+1)e^{-3t} + 3ae^{-t} - 2t \\ 3ae^{-3t} + 3ae^{-t} - 2t \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Tomando primitivas componente a componente, obtenemos (una opción para) $F(t)$:

$$F(t) = \begin{bmatrix} -(a+1)e^{-3t} - 3ae^{-t} - t^2 \\ -ae^{-3t} - 3ae^{-t} - t^2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

y por ende la solución particular $X_{\mathrm{p}}(t)$ queda dada por:

$$X_{\mathrm{p}}(t) = e^{tA}F(t) = \begin{bmatrix} -(4a+1)e^{-2t} - t^2e^{-t} \\ -4ae^{-2t} - t^2e^{-t} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

La solución de la homogénea asociada es

$$X_{\mathrm{h}}(t) = k_1e^t \begin{bmatrix} a+1 \\ a \end{bmatrix} + k_2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con $k_1$ y $k_2$ constantes reales arbitrarias.
La solución general, por ende, queda dada por:

$$X(t) = k_1e^t \begin{bmatrix} a+1 \\ a \end{bmatrix} + k_2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(4a+1)e^{-2t} - t^2e^{-t} \\ -4ae^{-2t} - t^2e^{-t} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{bmatrix} k_1(a+1)e^t + k_2e^{-t} - (4a+1)e^{-2t} - t^2e^{-t} \\ k_1ae^t + k_2e^{-t} - 4ae^{-2t} - t^2e^{-t} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

**Alternativas:**

- La solución de la homogénea asociada se puede escribir también como

  $$X_{\mathrm{h}}(t) = e^{tA}X_0, \tag{12}$$

  que se puede desarrollar y agrupar constantes.
- Hay una fórmula de variación de parámetros directa

  $$X(t) = e^{tA}X_0 + e^{tA}\int_0^t e^{-uA}B(u)\,du. \tag{13}$$

  En esta ecuación el término dentro de la integral es el mismo que se utilizó en el desarrollo de esta pregunta, y $X_0$ es un vector de constantes que representa a $X(0)$ (el 1er término de esta fórmula es una alternativa a la solución de la ecuación homogénea asociada).
- Otra fórmula para la variación de parámetros (que se desprende fácilmente de la anterior) es

  $$X(t) = e^{tA}X_0 + Pe^{tD}\int_0^t e^{-uD}P^{-1}B(u)\,du. \tag{14}$$

  En esta ecuación, las matrices $P$ y $D$ son las que vienen de la diagonalización de $A$. El término que queda dentro de la integral no es el mismo que en el desarrollo del ejercicio.
  También $e^{tA}X_0$ se puede reemplazar por $Pe^{tD}V$, con $V$ un vector de constantes.

**Puntaje:**

- Identificación y cálculo del término a integrar $(7)$ (ó también los términos dentro de la integral en las alternativas $(13)$ ó $(14)$). (0,7 pts.)
- Integrar el término calculado (ya obteniendo una primitiva como en $(8)$ o resolviendo las integrales definidas como en las alternativas $(13)$ ó $(14)$). (0,4 pts.)
- Obtener la solución particular (como en $(9)$ o como el segundo término de las alternativas $(13)$ ó $(14)$). (0,6 pts.)
- Calcular todas las soluciones de la ecuación homogénea asociada. (0,4 pts.)
- Plantear la solución general como suma de vectores como en $(10)$ (a partir de cualquier alternativa) o desarrollar completamente como en $(11)$. (0,4 pts.)

*(d)* Fije $a = 0$. Elija un vector $X_0$ tal que si $X(0) = X_0$, entonces $X(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

**Solución:** De la fórmula $(11)$ en la parte anterior, cuando $a = 0$, la solución adquiere la forma:

$$\begin{bmatrix} k_1e^t + k_2e^{-t} - e^{-2t} - t^2e^{-t} \\ k_2e^{-t} - t^2e^{-t} \end{bmatrix}$$

y notamos que todos los términos que involucran exponenciales negativas convergen a $0$ cuando $t \to \infty$, con lo que $X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ si, y solo si, $k_1 = 0$. Bajo esta condición, $X(0)$ toma la forma:

$$X(0) = \begin{bmatrix} k_2 - 1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

por lo que cualquier $X_0$ de esta forma garantiza (por el Teorema de Existencia y Unicidad) que la solución converge a $0$, lo pedido.

**Puntaje:**

- Escribir una expresión de $X(t)$ para $a = 0$. (0,2 pts.)
- Las exponenciales negativas tienden a cero, y las positivas a $\infty$. Se escogen las constantes de manera que no aparezcan exponenciales positivas. (0,5 pts.)
- Escoger una condición inicial para obtener las constantes escogidas. (0,3 pts.)

**P2.-** Para este ejercicio, se asume que el cálculo de la transformada de Laplace de una función tanto vectorial como matricial se realiza componente a componente.

*(a)* Considere $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de modo que para todo $s > 0$, la matriz $sI - A$ es invertible, donde $I$ es la matriz identidad de $2 \times 2$. Considere además una solución $X(t)$ del sistema lineal homogéneo con condición inicial

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

.

I. Explicar brevemente por qué $X(0^+) = X_0$.

**Solución:** Como los coeficientes de $A$ en el sistema lineal homogéneo con condición inicial son constantes, y por lo tanto continuos en todo $\mathbb{R}$, entonces su (única) solución $X(t)$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$, en particular continua.
Por lo tanto, $X(0^+) = \lim_{t\to 0^+} X(t) = X(0)$.

**Puntaje:**

- Los coeficientes de la matriz son constantes y por lo tanto continuos en todos los reales. (0,1 pts.)
- Por teorema de existencia y unicidad, la solución $X(t)$ es continuamente diferenciable, y por lo tanto continua. (0,2 pts.)
- Concluir el límite por continuidad. (0,2 pts.)

II. Escriba la relación vectorial $X'(t) = AX(t)$ como un sistema de dos ecuaciones lineales, aplique la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema, y concluya que

$$(sI - A)\mathcal{L}[X(t)](s) = X_0.$$

**Solución:** El vector $\mathcal{L}[X(t)]$ es el vector cuyas coordenadas son las transformadas de Laplace de las dos componentes de $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$.
Al escribir $X'(t) = AX(t)$ como un sistema de dos ecuaciones lineales obtenemos:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t). \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación se obtiene

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}[x'(t)] &=& a\mathcal{L}[x(t)] + b\mathcal{L}[y(t)] \\ \mathcal{L}[y'(t)] &=& c\mathcal{L}[x(t)] + d\mathcal{L}[y(t)] \end{array} \iff \begin{array}{rcl} s\mathcal{L}[x(t)] - x(0^+) &=& a\mathcal{L}[x(t)] + b\mathcal{L}[y(t)] \\ s\mathcal{L}[y(t)] - y(0^+) &=& c\mathcal{L}[x(t)] + d\mathcal{L}[y(t)] \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{rcl} (s-a)\mathcal{L}[x(t)] - b\mathcal{L}[y(t)] &=& x(0^+) \\ -c\mathcal{L}[x(t)] + (s-d)\mathcal{L}[y(t)] &=& y(0^+) \end{array}$$

$$\iff \begin{bmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}[x(t)] \\ \mathcal{L}[y(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0^+) \\ y(0^+) \end{bmatrix}$$

$$\iff (sI - A)\mathcal{L}[X(t)] = X_0 \tag{16}$$

**Puntaje:**

- Expresar $X(t)$ como un vector de dos coordenadas y $X'(t) = AX(t)$ como un sistema de dos ecuaciones lineales. (0,2 pts.)
- Aplicar transformada de Laplace y usar su linealidad. (0,3 pts.)
- Aplicar la fórmula de la transformada de una derivada. (0,3 pts.)

- Agrupar los términos y expresar de manera matricial. (0,2 pts.)

III. Muestre, por otro lado, que $\mathcal{L}[X(t)](s) = \mathcal{L}[e^{tA}](s)X_0$.

**Solución:** La solución $X(t)$ del sistema homogéneo con condición inicial satisface

$$X(t) = e^{tA}X_0. \tag{17}$$

Escribamos $e^{tA} = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{bmatrix}$. De la linealidad de la transformada de Laplace, obtenemos la igualdad:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[X(t)] &= \mathcal{L}[e^{tA}X_0] \\
&= \mathcal{L}\begin{bmatrix} u_{11}(t)x_0 + u_{12}(t)y_0 \\ u_{21}(t)x_0 + u_{22}(t)y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{L}[u_{11}(t)x_0 + u_{12}(t)y_0] \\ \mathcal{L}[u_{21}(t)x_0 + u_{22}(t)y_0] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{L}[u_{11}(t)]x_0 + \mathcal{L}[u_{12}(t)]y_0 \\ \mathcal{L}[u_{21}(t)]x_0 + \mathcal{L}[u_{22}(t)]y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{L}[u_{11}(t)] & \mathcal{L}[u_{12}(t)] \\ \mathcal{L}[u_{21}(t)] & \mathcal{L}[u_{22}(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{L}[e^{tA}] \cdot X_0. \qquad (18)
\end{aligned}$$

**Puntaje:**

- Recordar (17). (0,3 pts.)
- Calcular la transformada de $e^{tA}X_0$ componente a componente, aplicando la linealidad. (0,4 pts.)
- Reescribir matricialmente y concluir. (0,3 pts.)

IV. Demuestre que $\mathcal{L}[e^{tA}](s) = (sI - A)^{-1}$, para $s > 0$.
[Indicación: Puede ser útil saber que si $M$ es una matriz de $m \times n$ tal que $Mx = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $M = O_{m\times n}$, la matriz nula de $m \times n$.]

**Solución:** Multiplicando (18) por $(sI - A)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
(sI - A)\mathcal{L}[X(t)] = (sI - A)\mathcal{L}[e^{tA}]X_0 &\Longrightarrow X_0 = (sI - A)\mathcal{L}[e^{tA}]X_0 \quad (\text{por } (16)) \\
&\Longrightarrow \left(I - (sI - A)\mathcal{L}[e^{tA}]\right)X_0 = 0 \qquad (19)
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para cualquier $X_0 \in \mathbb{R}^2$, aplicando la indicación se concluye que

$$I - (sI - A)\mathcal{L}[e^{tA}](s) = O_{2\times 2} \Longrightarrow (sI - A)\mathcal{L}[e^{tA}](s) = I$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[e^{tA}](s) = (sI - A)^{-1} \tag{20}$$

**Puntaje:**

- Combinar $(16)$ y $(18)$ para obtener $(19)$ o equivalente. (0,5 pts.)
- Aplicar la indicación usando que $X_0$ puede ser cualquier vector. (0,3 pts.)
- Concluir. (0,2 pts.)

*(b)* Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Usando la igualdad de **P2.-**$(a)$IV., demuestre que $e^{tA} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos(bt) & \operatorname{sen}(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$.

**Solución:** Por la ecuación $(20)$ de la parte anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{tA}](s) &= \begin{bmatrix} s-a & -b \\ b & s-a \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{(s-a)^2+b^2}\begin{bmatrix} s-a & b \\ -b & s-a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2} & \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2} \\ -\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2} & \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \end{bmatrix} && (21) \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\cos(bt)](s-a) & \mathcal{L}[\operatorname{sen}(bt)](s-a) \\ -\mathcal{L}[\operatorname{sen}(bt)](s-a) & \mathcal{L}[\cos(bt)](s-a) \end{bmatrix} && (22) \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{L}[e^{at}\cos(bt)](s) & \mathcal{L}[e^{at}\operatorname{sen}(bt)](s) \\ -\mathcal{L}[e^{at}\operatorname{sen}(bt)](s) & \mathcal{L}[e^{at}\cos(bt)](s) \end{bmatrix} && (23) \\
&= \mathcal{L}\begin{bmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\operatorname{sen}(bt) \\ -e^{at}\operatorname{sen}(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix}(s)
\end{aligned}$$

El teorema de Lerch nos diría que:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\operatorname{sen}(bt) \\ -e^{at}\operatorname{sen}(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{bmatrix} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos(bt) & \operatorname{sen}(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

excepto en los puntos de discontinuidad de cada parte. La parte derecha tiene componentes continuas, y la parte izquierda es continua pues $e^{tA}$ es una matriz diferenciable. Como no hay puntos de discontinuidad, entonces son completamente iguales para $t > 0$.

**Puntaje:**

- Expresar la conclusión $(20)$ de la parte anterior. (0,3 pts.)
- Calcular la inversa de la matriz (hasta $(21)$). (0,3 pts.)
- Reconocer las transformadas de seno y coseno (de $(21)$ a $(22)$). (0,5 pts.)
- Utilizar la fórmula de traslación en $s$ (de $(22)$ a $(23)$). (0,6 pts.)
- Obtener las igualdades matriciales sin transformadas. (0,4 pts.)
- Justificar, usando el teo de Lerch y la continuidad de cada lado de la igualdad. (0,4 pts.)

**P3.-** *(a)* Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz cuyos coeficientes satisfacen la relación

$$(a-d)^2 + 4cb = 0.$$

I. Demuestre que $A$ posee un único valor propio $\lambda_0$, y exprese dicho valor $\lambda_0$ en términos de los coeficientes de $A$.

**Solución**: El polinomio característico de $A$ es:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc. \end{aligned} \tag{25}$$

Las raíces de este polinomio son:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\ &= \frac{a+d \pm \sqrt{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc}}{2} \\ &= \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} \\ &= \frac{a+d}{2} \end{aligned}$$

pues $(a-d)^2 + 4bc = 0$. Entonces $A$ tiene un único valor propio $\lambda_0 = \dfrac{a+d}{2}$.

**Puntaje:**

- Calcula el polinomio característico (25) de $A$. (0,2 pts.)
- Calcula las raíces del polinomio característico usando la propiedad de los coeficientes de la matriz. (0,2 pts.)
- Concluye que el valor propio es único y obtiene su valor. (0,1 pts.)

II. Verifique que $(A - \lambda_0 I)^2 = O_{2\times 2}$ y concluya que $(A - \lambda_0 I)^k = O_{2\times 2}$ para todo $k \geq 2$, donde $O_{m\times n}$ denota la matriz nula de $m \times n$.

**Solución**:

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_0 I)^2 &= \left(A-\left(\frac{a+d}{2}\right)I\right)^2 \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & \dfrac{d-a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & \dfrac{d-a}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{(a-d)^2}{4}+bc & \dfrac{b(a-d)}{2}-\dfrac{b(d-a)}{2} \\ \dfrac{c(a-d)}{2}+\dfrac{c(d-a)}{2} & bc+\dfrac{(d-a)^2}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{(a-d)^2+4bc}{4} & \dfrac{b(a-d)}{2}-\dfrac{b(a-d)}{2} \\ \dfrac{c(a-d)}{2}-\dfrac{c(a-d)}{2} & \dfrac{(a-d)^2+4bc}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Notar que se aplicó la hipótesis de que $(a-d)^2+4bc=0$.
Si asumimos que $(A-\lambda_0 I)^k = O_{2\times 2}$, entonces $(A-\lambda_0 I)^{k+1} = (A-\lambda_0 I)^k(A-\lambda_0 I) = O_{2\times 2}$. Como lo asumido es cierto para $k=2$ entonces, inductivamente, es cierto para $k\geq 2$.

**Puntaje:**

- Multiplica $(A-\lambda_0 I)$ por sí misma usando el valor de $\lambda_0$ y la condición de los coeficientes de la matriz $A$. (0,3 pts.)
- Concluye usando inducción de manera resumida o usando una recursión (no necesariamente con total formalidad). (0,2 pts.)

III. Calcule $e^{tA}$.
[Indicación: Escribir $A=(A-\lambda_0 I)+\lambda_0 I$, y aplicar la propiedad $e^{t(A+B)}=e^{tA}e^{tB}$ cuando $AB=BA$.]

**Solución**: Notar que

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_0 I)(\lambda_0 I) &= \lambda_0 A+\lambda_0^2 I \\
(\lambda_0 I)(A-\lambda_0 I) &= \lambda_0 A+\lambda_0^2 I,
\end{aligned} \tag{26}
$$

es decir, las matrices $\lambda_0 I$ y $(A-\lambda_0 I)$ conmutan. Podemos aplicar la indicación y tenemos

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{t((A-\lambda_0 I)+\lambda_0 I)} \\
&= e^{t(A-\lambda_0 I)}e^{t\lambda_0 I}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Como $t\lambda_0 I$ es diagonal, entonces

$$e^{t\lambda_0 I} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Para calcular $e^{t(A-\lambda_0 I)}$ lo hacemos por definición:

$$\begin{aligned} e^{t(A-\lambda_0 I)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_0 I)^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_0 I)^k = I + t(A-\lambda_0 I). \end{aligned} \tag{29}$$

Para este último cálculo se utilizó que $(A-\lambda_0 I)^k$ es la matriz nula para $k \geq 2$, que es el resultado de la parte *(b)*.

$$\begin{aligned} I + t(A-\lambda_0 I) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & \dfrac{d-a}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{t}{2}(a-d) & bt \\ ct & 1 + \dfrac{t}{2}(d-a) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t(A-\lambda_0 I)} e^{t\lambda_0 I} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{t}{2}(a-d) & bt \\ ct & 1 + \dfrac{t}{2}(d-a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{a+d}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{a+d}{2}t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(1 + \dfrac{t}{2}(a-d)\right) e^{\frac{a+d}{2}t} & bte^{\frac{a+d}{2}t} \\ cte^{\frac{a+d}{2}t} & \left(1 + \dfrac{t}{2}(d-a)\right) e^{\frac{a+d}{2}t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Puntaje:**

- Seguir la indicación chequeando la conmutatividad ((26) y (27)). (0,4 pts.)
- Exponencial de la parte diagonal, (28). (0,6 pts.)
- Exponencial de la parte nilpotente, (29). (0,6 pts.)
- Desarrollo de cada parte y cálculo final. (0,4 pts.)

*(b)* Encuentre, en cada caso, una función continua $g$ para $t > 0$ que satisfaga la igualdad dada. Justifique.

I. $\mathcal{L}[g(t)](s) = \dfrac{5s^2 + 24s + 39}{(s+3)^2(s+1)}; \qquad s > -1.$

**Solución**: Usando fracciones parciales tenemos

$$\frac{5s^2+24s+39}{(s+3)^2(s+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{C}{s+1},$$

implicando que $A(s+3)(s+1)+B(s+1)+C(s+3)^2 = 5s^2+24s+39$. La igualdad se cumple para $A=0, B=-6$ y $C=5$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)](s) &= \frac{5}{s+1} - \frac{6}{(s+3)^2}\\ &= 5\mathcal{L}[e^{-t}](s) - 6\mathcal{L}[t](s+3)\\ &= 5\mathcal{L}[e^{-t}](s) - 6\mathcal{L}[e^{-3t}t](s).\end{aligned}$$

Luego

$$g(t) = 5e^{-t} - 6te^{-3t},$$

que es una función continua.

**Puntaje:**

- Descomposición usando fracciones parciales. (0,6 pts.)
- Reconocer la transformada de la exponencial. (0,2 pts.)
- Reconocer la transformada de $t^2$. (0,2 pts.)
- Reconocer la traslación en $s$ aplicando bien la fórmula. (0,3 pts.)
- Escoger la función continua asociada (acá también se puede aplicar la anti-transformada $\mathcal{L}^{-1}$). (0,2 pts.)

II. $\mathcal{L}[g(t)](s) = \dfrac{3s-2}{s^2+4s+20} + \dfrac{e^{-s}}{s^3}; \quad s>0.$

**Solución**: El denominador de la primera fracción es cuadrático irreducible. Lo escribimos como suma de cuadrados.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)](s) &= \frac{3s-2}{(s+2)^2+16} + \frac{e^{-s}}{s^3}\\ &= \frac{3(s+2)-8}{(s+2)^2+16} + \frac{1}{2}e^{-s}\frac{2!}{s^3}\\ &= 3\frac{(s+2)}{(s+2)^2+16} - 2\frac{4}{(s+2)^2+16} + \frac{1}{2}e^{-s}\mathcal{L}[t^2](s)\\ &= 3\mathcal{L}[\cos(4t)](s+2) - 2\mathcal{L}[\operatorname{sen}(4t)](s+2) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[H(t-1)(t-1)^2](s)\\ &= 3\mathcal{L}[e^{-2t}\cos(4t)](s) - 2\mathcal{L}[e^{-2t}\operatorname{sen}(4t)](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[H(t-1)(t-1)^2](s).\end{aligned}$$

Podemos tomar

$$g(t) = 3e^{-2t}\cos(4t) - 2e^{-2t}\,\mathrm{sen}(4t) + \frac{1}{2}H(t-1)(t-1)^2,$$

que es continua pues la función

$$\frac{1}{2}H(t-1)(t-1)^2 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (t-1)^2/2 & t \geq 1 \end{cases}$$

es continua.

**Puntaje:**

- Completar cuadrado en el denominador de la 1ra fracción. (0,2 pts.)
- Reconocer la transformada de $t^2$. (0,2 pts.)
- Reconocer las transformadas de seno y coseno. (0,3 pts.)
- Reconocer la traslación en $s$ aplicando bien la fórmula. (0,3 pts.)
- Reconocer la traslación en $t$ en el último término. (0,3 pts.)
  (La función de Heaviside $H(t-1)$ también se puede denotar $H_1(t)$)
- Escoger la función y chequear que es continua.
  (acá también se puede aplicar la anti-transformada $\mathcal{L}^{-1}$). (0,2 pts.)