Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2025-2

Control 2 - Otoño 2025

Importante: *En este enunciado, la matriz representante de la función lineal $T\colon U \to V$ con respecto a las bases (finitas) $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V$ en U, V, respect., se denotará $[T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_U}$ (a veces también denotada $[T]_{\mathcal{B}_V \leftarrow \mathcal{B}_U}$).*

P1. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ donde $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función lineal tal que $f(v_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ y $f(v_3) = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$.

a) (1.5 ptos) Determine $f(v)$, donde $v = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

b) (2.0 ptos) Determine una base del núcleo de f, es decir, de $\mathrm{Ker}(f)$, e indique si la función es inyectiva.
Indicación: Estudie para qué reales α, β, γ el vector $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ pertenece a $\mathrm{Ker}(f)$.

c) (2.0 ptos) Determine una base de $\mathrm{Im}(f)$ e indique si la función es epiyectiva.

d) (0.5 ptos) ¿Es f un isomorfismo? Justifique.

Solución:

a) Primero determinamos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Para ello planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema lineal obtenemos (detalles omitidos) que $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$.**[0.9 ptos por encontrar v como combinación lineal de $\mathcal{B}$]**

Por linealidad de f, definición de f, y algebra matricial, sigue que

$$f(v) = f(1v_1 + 2v_2 + 2v_3) = 1f(v_1) + 2f(v_2) + 2f(v_3) = 1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\12\\5\end{pmatrix}.$$

[0.3 ptos por usar linealidad – 0.3 ptos por concluir]

b) Se pide encontrar los $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(v) = 0$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^3$, basta con encontrar los $v \in \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$ tales que que $f(v) = 0$, o equivalentemente, determinar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que **[0.8 ptos por formular (implícita o explícitamente) lo que hay que determinar]**

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = 0.$$

Observar que:**[0.4 ptos por plantear/llegar al sistema que se tiene que resolver]**

$$\begin{aligned}
f(\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3)=0 &\iff \alpha f(v_1)+\beta f(v_2)+\gamma f(v_3)=0 && \text{(por linealidad de } f)\\
&\iff \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}=0 && \text{(por definición de } f)\\
&\iff \begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&4\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0. && \text{(por álgebra matricial)}
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenido (detalles omitidos), sigue que $\alpha=-2\gamma$ y $\beta=0$. Luego,

$$\mathrm{Ker}(f)-\left\{\gamma\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}:\gamma\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle. \qquad \textbf{[0.4 ptos por especificar el } \mathrm{Ker}\textbf{]}$$

Como $\mathrm{Ker}(f)\neq\{0\}$, por propiedad conocida, f no es inyectiva **[0.2 ptos por conclusión y 0.2 ptos por justificación]**.

c) **Primera forma:** Por Teorema Núcleo Imagen y parte anterior se tiene que **[0.4 ptos por invocar y aplicar el TNI]**

$$\dim(\mathrm{Im}(f))=3-\dim(\mathrm{Ker}(f))=3-1=2.$$

Comparando dimensiones, sigue que $\mathrm{Im}(f)\neq\mathbb{R}^3$. Luego, f no es epiyectiva **[0.2 ptos por conclusión y 0.2 ptos por justificación]**.

Para determinar $\mathrm{Im}(f)$, dado que su dimension es 2, basta encontrar un subconjunto de $\mathrm{Im}(f)$ de 2 vectores linealmente independientes **[0.4 ptos por, implícita o explícitamente, observar lo anterior]**. Claramente $\{f(v_1),f(v_2)\}\subseteq\mathrm{Im}(f)$, luego $\langle\{f(v_1),f(v_2)\}\rangle\subseteq\mathrm{Im}(f)$ **[0.4 ptos por observar que $f(v_1),f(v_2)\in\mathrm{Im}(f)$]**. Luego, como $\{f(v_1),f(v_2)\}$ es linealmente independiente e $\mathrm{Im}(f)$ es de dimensión 2, se tiene que:

$$\mathrm{Im}(f)=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle. \qquad \textbf{[0.4 ptos por decir que } \{f(v_1),f(v_2)\} \textbf{ es l.i. y concluir]}$$

2da. forma: Como conocemos una base para el $\mathrm{Ker}(f)$ podemos extenderla a una base de $\mathbb{R}^3$ **[0.6 ptos por invocar, implícita o explícitamente, el Teorema de Completación de Bases]**, por ejemplo tomando los vectores $v_2=(2,1,0)^T$ y $v_3=(-1,0,0)^T$**[0.4 ptos por identificar la completación de una base del** Ker], y sabemos que sus imágenes, $(2,1,0)^T$, y $(2,4,2)^T$ definen una base de $\mathrm{Im}(f)$ **[0.4 ptos por observación sobre las imagenes]**. Entonces,

$$\mathrm{Im}(f)=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\right\}\right\rangle. \qquad \textbf{[0.2 ptos por concluir]}$$

Cómo $\mathrm{Im}(f)\neq\mathbb{R}^3$, por definición, f no es epiyectiva **[0.2 ptos por conclusión y 0.2 ptos por justificación]**.

3ra. forma: Por definción de imagen, $\mathrm{Im}(f)=\{f(v)\colon v\in\mathbb{R}^3\}$ **[0.2 ptos por la definición]**. Pero, como $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, se tiene que para todo $v\in\mathbb{R}^3$ existen $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tales que $v=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$ **[0.2 ptos por expresar elementos del dominio de f como combinación**

lineal de la base]. Luego,

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) + \gamma f(v_3) && \text{(por linealidad de } f) \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} && \text{(por definición de } f) \\ &= (\alpha + 2\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. && \text{(por álgebra matricial)} \end{aligned}$$

[**0.4 ptos por la derivación anterior**]

Sigue que $f(v) \in \langle \{(1,2,1)^T, (2,1,0^T\} \rangle$, por lo que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \langle \{(1,2,1)^T, (2,1,0^T\} \rangle$ [**0.4 ptos por la inclusión**]. La igualdad se tiene por argumentos de dimensionalidad (observando que $f(v_1), f(v_2) \in \mathrm{Im}(f)$ son linealmente independientes, o por TNI y parte *a*) se deduce que $\mathrm{Im}(f)$ tiene dimensión 2) [**0.4 ptos por conclusión y justificación**].

Cómo $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, por definición, f no es epiyectiva [**0.2 ptos por conclusión y 0.2 ptos por justificación**].

d) [**0.2 ptos por concluir que f no es isomorfismo y 0.3 ptos por cualquiera de las siguientes justificaciones**]

1ra. forma: Como por *b*) sabemos que f no es inyectiva (o equivalentemente $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$), entonces no es biyectiva y por lo tanto tampoco es un isomorfismo.

2da. forma: Como por *c*) sabemos que f no es epiyectiva (o equivalentemente $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$), entonces no es biyectiva y por lo tanto tampoco es un isomorfismo.

P2. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ bases de un espacio vectorial V. Sea $T \colon V \to V$ una función lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (2.0 ptos) Determine las coordenadas de los vectores $3v_1 + v_2$ y $T(3v_1 + v_2)$ en términos de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, respectivamente. Es decir, calcule $[3v_1 + v_2]_{\mathcal{B}}$ y $[T(3v_1 + v_2)]_{\mathcal{B}'}$.

b) (2.0 ptos) Calcule la matriz de pasaje de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ y úsela junto a la matriz $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ para demostrar que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) (2.0 ptos) Calcule $[T \circ T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
Indicación: Puede serle útil usar la parte b).

Solución:

a) Las coordenadas del vector $w = 3v_1 + v_2$ en la base $\mathcal{B}$ son

$$[w]_{\mathcal{B}} = (3, 1, 0)^T. \qquad \textbf{[1.0 pto.]}$$

1era. forma: Las coordenadas del vector $T(w) = 3T(v_1) + T(v_2)$ son

$$[T(w)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

[0.5 ptos. por demostrar implícita o explícitamente que conoce la relación entre las coordenadas y 0.5 ptos. por el cálculo correcto del producto matricial]

2da. forma: Por definición de matriz representante, se observa que

$$\begin{aligned} T(v_1) &= 0(v_1 + v + 2) + 1(v_2 + v_3) + 1(v_1 + v_3), \\ T(v_2) &= 1(v_1 + v + 2) + 0(v_2 + v_3) + 1(v_1 + v_3). \end{aligned}$$

[0.4 ptos por obtener $T(v_1)$ y $T(v_2)$ de la matriz representante.]
Sigue, por linealidad, que:

$$T(3v_1 + v_2) = 3T(v_1) + T(v_2) = 1(v_1 + v + 2) + 4(v_2 + v_3) + 4(v_1 + v_3), \qquad \text{[0.2 ptos]}$$

Luego, $[T(3v_1 + v_2)]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (1, 3, 4)^T$ **[0.2 ptos]**.

b) La matriz de pasaje $[Id_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ pedida tiene en cada columna las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}'$ en la base $\mathcal{B}$. Así, ésta es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[0.3 ptos. por cada columna correcta]

1ra. forma. La matriz $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ está dada por

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [Id_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[0.8 ptos. por plantear correctamente el cambio de bases y 0.3 por el cálculo del producto de matrices.]

2da. forma. Por la definición de $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sabemos que $T(v_1) = (v_2 + v_3) + (v_3 + v_1)$, $T(v_2) = (v_1 + v_2) + (v_3 + v_1)$ y $T(v_3) = (v_1 + v_2) + (v_2 + v_3)$. **[0.2 ptos. por la escritura de cada imagen por T de los vectores de la base $\mathcal{B}$ usando la información de la matriz $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$]**
Entonces, $[T(v_1)]_{\mathcal{B}} = (1, 1, 2)^T$, $[T(v_2)]_{\mathcal{B}} = (2, 1, 1)^T$ y $[T(v_3)]_{\mathcal{B}} = (1, 2, 1)^T$. Así,

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[0.3 ptos. por agrupar los vectores v_1, v_2 y v_3 y obtener las imágenes en términos de la base $\mathcal{B}'$ y 0.2 ptos. por escribir la matriz $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$]

c) Se sabe que la matriz representante de una composición es el producto de las matrices representantes de sus factores en las bases correspondientes. **[1.0 pto. por mostrar implícita o explícitamente que conoce la regla de la matriz representante de una composición]**
Para $T \circ T$ usaremos que

$$[T \circ T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}.$$

Entonces,

$$[T \circ T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

[0.5 ptos. por la aplicación de la regla antes mencionada al caso en discusión y 0.5 ptos. por cálcular el producto de matrices correctamente]

P3. Sea V un espacio vectorial y sean $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2\}$ tales que $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ es base de V.

a) (2 ptos) Argumente que existe una función lineal $L : V \to V$ tal que

$$L(v) = \begin{cases} 2v, & \text{si } v \in \mathcal{B}_U, \\ 3v, & \text{si } v \in \mathcal{B}_W. \end{cases}$$

b) (2 ptos) Determine $[L+S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V}$ sabiendo que $[S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V} = 3I_5$.

c) (2 ptos) Demuestre que $L(U) = U$ donde $U = \langle B_U \rangle$ (por definición de imagen, $L(U) = \{L(u) \colon u \in U\}$).

Solución:

a) Basta recordar que una funcion lineal queda completamente determinada por los valores que toma en una base, por lo que conocidos sus valores en una base se pueden extrapolar a todo el dominio [**2.0 ptos por invocar, implícita o explícitamente, el resultado**]. En este caso particular, $\mathcal{B}_V$ es base de V, por lo que L queda completamente determinada por los valores $L(u_1), L(u_2), L(u_3), L(w_1), L(w_2)$. En particular, si $v \in V$ evalúa a:

$$L(v) = 2(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) + 3(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2),$$

si $\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ satisfacen que $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$.

b) Por resultado visto sobre matriz representante de la suma de transformaciones lineales, sabemos que:

$$[L+S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V} = [L]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V} + [S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V}. \qquad \textbf{[0.6 ptos]}$$

Como $[S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V} = 3I_5$, bastará con determinar $[L]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V}$ [**0.4 ptos por evidenciar, implícita o explícitamente, que hay que calcular** $[L]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V}$]. Para ello, por definición de matriz representante, evaluamos L en los elementos de la base $\mathcal{B}_V$ y los expresamos como combinación lineal de la misma base:

$$\begin{array}{rcccl} L(u_1) & = & 2u_1 & = & 2u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0w_1 + 0w_2, \\ L(u_2) & = & 2u_2 & = & 0u_1 + 2u_2 + 0u_3 + 0w_1 + 0w_2, \\ L(u_3) & = & 2u_3 & = & 0u_1 + 0u_2 + 2u_3 + 0w_1 + 0w_2, \\ L(w_1) & = & 3w_1 & = & 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 3w_1 + 0w_2, \\ L(w_2) & = & 3w_2 & = & 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0w_1 + 3w_2. \end{array} \qquad \textbf{[0.4 ptos]}$$

Sigue que:

$$[L]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[0.2 ptos]}$$

Luego,

$$[L+S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & 6 & \\ & & & & 6 \end{pmatrix}.$$

[0.4 ptos por concluir]

c) **1ra. forma:** Si $u \in U = \langle \{u_1, u_2, u_3\} \rangle$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ [**0.4 ptos por expresar elementos del dominio de L como combinación lineal de la base**].

Luego,

$$\begin{aligned} L(u) &= \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2) + \alpha_3 L(u_3) && \text{(por linealidad de } L) \\ &= 2(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 && \text{(por definición de } L) \\ &= 2u. \end{aligned}$$

[0.4 ptos por derivación anterior.]

Como $2u \in U$, sigue que $L(U) \subseteq U$ [**0.4 ptos por justificar inclusión**].

Además, por linealidad de L, se tiene que $L(\frac{1}{2}u) = \frac{1}{2}(2u) = u$, y como $\frac{1}{2}u \in U$ (porque U es un subespacio vectorial), sigue que $u \in L(U)$ [**0.6 ptos por derivación y justificación de la pertenencia**].

Como u es arbitrario, sigue que $U \subseteq L(U)$ [**0.2 ptos por concluir**].

2da. forma: Dado que $[\cdot]_{\mathcal{B}_V} : U \to \mathbb{R}^5$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, bastará verificar que $[L(U)]_{\mathcal{B}_V} = [U]_{\mathcal{B}_V}$ [**0.8 ptos por enunciar esta forma de abordar el problema**].

Sea $\{e_1, ..., e_5\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$.

Como $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base de U, entonces $\{\{[u_1]_{\mathcal{B}_V}, [u_2]_{\mathcal{B}_V}, [u_3]_{\mathcal{B}_V}\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es base de $[U]_{\mathcal{B}_V}$.

En particular, $[U]_{\mathcal{B}_V} = \langle \{e_1, e_2, e_3\} \rangle$ [**0.6 ptos por esta conclusión**].

Por otro lado, si $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, entonces

$$[L(u)]_{\mathcal{B}_V} = [L]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V} [u]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

([**0.4 ptos por usar matriz representante para determinar** $[L(u)]_{\mathcal{B}_V}$])

Luego, $[L(U)]_{\mathcal{B}_V} = \langle \{e_1, e_2, e_3\} \rangle$ [**0.2 ptos por esta conclusión**].

En resumen, $[L(U)]_{\mathcal{B}_V} = \langle \{e_1, e_2, e_3\} \rangle = [U]_{\mathcal{B}_V}$.

Tiempo: 3.0 hrs.