

P1.

(a)

(i) (2 puntos) Para cada $b \in \mathbb{Q}$ definamos $H_b = \{a^b : a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Muestre que H_b es numerable. **Indicación:** considere la función $\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow H_b$ dada por $\phi(a) = a^b$.

(ii) (2 puntos) Muestre que $H = \{a^b : a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$ es numerable. **Indicación:** Escriba H como unión de conjuntos numerables, sobre un conjunto numerable.

(b) (2 puntos) Sean A y B conjuntos tales que $A \cup B$ es numerable. Muestre que A es numerable o B es numerable.

Solución

(a) (i) Consideramos la indicación: $\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow H_b$ dada por $\phi(a) = a^b$ es una biyección, en efecto:

• **Inyectividad**

$$\phi(a_1) = \phi(a_2) \implies a_1^b = a_2^b$$

Al tomamos raíz q -ésima a ambos lados. Dado que a_1 y a_2 son ambos positivos, concluimos que $a_1 = a_2$ y por tanto ϕ es inyectiva.

• **Epiyectividad** Sea $a^b \in H_b$. Se tiene que $a \in \mathbb{N}$ es tal que

$$\phi(a) = a^b$$

por lo tanto ϕ es biyectiva.

(ii) Notamos que

$$H = \{a^b : a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{Q}\} = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} H_b$$

por lo tanto H es numerable, pues es unión de conjuntos numerables (H_b) sobre un conjunto numerable ($\mathbb{Q}$)

Criterio

- 1 punto por la inyectividad de ϕ
- 1 punto por la epiyectividad de ϕ
- Descontar 0.5 puntos si no indica que $a_1^b = a_2^b \implies a_1 = a_2$ debido a que a_1 y a_2 son positivos.
- 1 punto por argumentar que $H = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} H_b$
- 1 punto por indicar que H es numerable al ser unión de numerables sobre un conjunto numerable.

(b) Supongamos que A y B son finitos. Se sabe que $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ por lo tanto $A \cup B$ sería finito, pero sabemos que no es así, por lo que A es infinito o B es infinito. Sin perder generalidad supongamos que A es infinito. Tomando en cuenta que $A \subset A \cup B$ se tiene que A es numerable, ya que es un conjunto infinito contenido dentro de un numerable.

- 1 punto Por deducir que A o B es finito
- 1 punto Por deducir que A o B es numerable

P2.

(a) Considere

$$S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

(i) (1.5 puntos) Calcule el valor de la suma de los términos de índice par que componen S , es decir $k = 2i$, con $i = 1, \dots, n$.

(ii) (1.5 puntos) Calcule el valor de la suma de los términos de índice impar que componen S , es decir $k = 2i - 1$, con $i = 1, \dots, n$.

(iii) (1 punto) En base a lo calculado en las partes anteriores, entregue el valor de S .

Solución

(a) (i) La suma se debe recorrer con $k = 2i$, desde $i = 0$ hasta $i = n$, (0.5 puntos) luego

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{2i} (2i)^2}_{(0.5 \text{ puntos})} = \sum_{i=1}^n 4i^2 = \underbrace{\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}}_{(0.5 \text{ puntos})}$$

(ii) La suma se debe recorrer con $k = 2i - 1$, desde $i = 1$ hasta $i = n$, (0.5 puntos) luego

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{2i-1} (2i-1)^2}_{(0.5 \text{ puntos})} = \sum_{i=1}^n (-1)(4i^2 - 4i + 1) = -4 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{\frac{-2n(n+1)(2n+1)}{3} + 2n(n+1) - n}_{(0.5 \text{ puntos})}$$

(iii) Tomando en cuenta lo de arriba se llega a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n (-1)^{2i} (2i)^2 + \sum_{i=1}^n (-1)^{2i-1} (2i-1)^2 && (0.5 \text{ puntos}) \\ &= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{-2n(n+1)(2n+1)}{3} + 2n(n+1) - n \\ &= n(2n+1) && (0.5 \text{ puntos}) \end{aligned}$$

(b) (2 puntos) Encuentre el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^n k k!$$

Indicación. Arme sume un 1 conveniente que contenga un término factorial

Solución

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k k! &= \sum_{k=1}^n k k! + k! - k! && (0.5 \text{ puntos}) \\
&= \sum_{k=1}^n k!(k+1) - k! \\
&= \sum_{k=1}^n (k+1)! - k! && (0.7 \text{ puntos}) \\
&= 2! - 1! + 3! - 2! + \dots + (n+1)! - n! \\
&= -1! + (n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 && (0.8 \text{ puntos})
\end{aligned}$$

P3.

(a) (3 puntos) Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ demuestre (sin usar inducción) que

$$\binom{n}{1} x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2} x^2(1-x)^{n-2} + 3\binom{n}{3} x^3(1-x)^{n-3} + \dots + n\binom{n}{n} x^n = nx$$

(b) (3 puntos) Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ demuestre (sin usar inducción) que

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (4^j - 2^j 3^{n-j}) = 3^n - 1$$

Solución

(a) Se tiene que

$$\binom{n}{1} x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2} x^2(1-x)^{n-2} + 3\binom{n}{3} x^3(1-x)^{n-3} + \dots + n\binom{n}{n} x^n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k$$

De acá se deduce que

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(n-k)!k!} (1-x)^{n-k} x^k \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} (1-x)^{n-k} x^k \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!n}{(n-k)!(k-1)!} (1-x)^{n-k} x^k$$

$$= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1-x)^{n-k} x^k \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-x)^{n-(k+1)} x^{k+1} \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-x)^{n-k} (1-x)^{-1} x^k x$$

$$= nx \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-x)^{n-1-k} x^k \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$= nx(1-x+x)^{n-1} \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$= nx$$

(b)

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (4^j - 2^j 3^{n-j}) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} 4^j - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} 2^j 3^{n-j} \quad (0.75 \text{ puntos})$$

$$= \left[-\binom{n}{0} 4^0 + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 4^j \right] - \left[-\binom{n}{0} 2^0 3^{n-0} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^j 3^{n-j} \right] \quad (0.75 \text{ puntos})$$

$$= -1 + (4+1)^n - (-3^n + (2+3)^n) \quad (0.75 \text{ puntos})$$

$$= -1 + 5^n + 3^n + 5^n$$

$$= 3^n - 1 \quad (0.75 \text{ puntos})$$