



CONTROL 2

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos; si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique las hipótesis.

P1. a) (2.0 pts.) Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(k) = \begin{cases} k - 1, & \text{si } k \text{ es par} \\ k, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Determine el conjunto imagen de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ por f y el conjunto pre-imagen de $\{2, 5\}$ por f , es decir, $f(\{0, 1, 2, 3, 4\})$ y $f^{-1}(\{2, 5\})$.

Solución

$$f(0) = -1, f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 3 \quad \dots\dots\dots \mathbf{0.8 \text{ pts.}}$$

$$\text{Determinar } f(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{-1, 1, 3\} \quad \dots\dots\dots \mathbf{0.2 \text{ pts.}}$$

$$2 \text{ no tiene preimagen y } 5 \text{ tiene como preimagen a } 5 \text{ y a } 6 \dots\dots\dots \mathbf{0.8 \text{ pts.}}$$

$$\text{Determinar } f^{-1}(\{2, 5\}) = \{5, 6\} \quad \dots\dots\dots \mathbf{0.2 \text{ pts.}}$$

b) (2.0 pts.) Calcule, para $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n 2^i (3^{i+1} + 4^{i-1}).$$

Solución

Separar en dos sumatorias

$$\sum_{i=1}^n 2^i (3^{i+1} + 4^{i-1}) = \sum_{i=1}^n 2^i 3^{i+1} + \sum_{i=1}^n 2^i 4^{i-1} \quad \dots\dots\dots \mathbf{0.5 \text{ pts.}}$$

Reconocer que ambas son sumas geométricas

$$\sum_{i=1}^n 2^i 3^{i+1} = 3 \sum_{i=1}^n 6^i \text{ y } \sum_{i=1}^n 2^i 4^{i-1} = (\sum_{i=1}^n 8^i)/4 \quad \dots\dots\dots \mathbf{0.5 \text{ pts.}}$$

Adecuar las sumas y aplicar fórmula conocida
o usar fórmula partiendo con $i = 1$

Solución (cont.)

$$\sum_{i=1}^n 6^i = -1 + \sum_{i=0}^n 6^i = -1 + \frac{6^{n+1} - 1}{5}$$

$$\sum_{i=1}^n 8^i = -1 + \sum_{i=0}^n 8^i = -1 + \frac{8^{n+1} - 1}{7}$$

.....0.5 pts.

Hacer el cálculo

$$\sum_{i=1}^n 2^i (3^{i+1} + 4^{i-1}) = 3 \left(-1 + \frac{6^{n+1} - 1}{5} \right) + \left(-1 + \frac{8^{n+1} - 1}{7} \right) / 4 \quad \text{.....0.5 pts.}$$

c) (2.0 pts) Para $n \in \mathbb{N}$, calcule

$$\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{k=1}^{n^2} (i-1) \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{n+1}.$$

Solución

Reconocer que es constante en una sumatoria

$$\sum_{k=1}^{n^2} (i-1) \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{n+1} = \frac{i-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \quad \text{.....0.5 pts.}$$

Uso de la propiedad telescópica

$$\sum_{k=1}^{n^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \sqrt{n^2} - \sqrt{0} = n \quad \text{.....0.5 pts.}$$

Cambio de índices y conocer suma de los primeros enteros

$$\sum_{i=2}^{n+1} (i-1) = \sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2. \quad \text{.....0.5 pts.}$$

Cálculo final

$$\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{k=1}^{n^2} (i-1) \frac{1 - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}}{\sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{n}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} (i-1) = \frac{n}{n+1} n(n+1)/2 = n^2/2. \quad \text{.....0.5 pts.}$$

P2. a) Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 0$, si $x < 1$ y $f(1) = 1$, y $g(x) = 1$, si $x > 0$, y $g(0) = 0$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en el intervalo $[0, 1]$ como sigue:

$$\forall a_1, a_2 \in [0, 1], (a_1 \mathcal{R} a_2 \Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) \wedge g(a_1) = g(a_2)).$$

(i) (2.0 ptos.) Muestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Solución

Para que sea una relación de equivalencia debe ser refleja,
simétrica y transitiva

.....0.5 pts.

Es refleja: $\forall a_1 \in [0, 1], f(a_1) = f(a_1)$ y $g(a_1) = g(a_1)$

.....0.5 pts.

Es simétrica: $\forall a_1, a_2 \in [0, 1],$

$f(a_1) = f(a_2)$ y $g(a_1) = g(a_2) \Rightarrow f(a_2) = f(a_1)$ y $g(a_2) = g(a_1)$0.5 pts.

Es transitiva

$\forall a_1, a_2, a_3 \in [0, 1], f(a_1) = f(a_2)$ y $f(a_2) = f(a_3) \Rightarrow f(a_1) = f(a_3)$

y $g(a_1) = g(a_2)$ y $g(a_2) = g(a_3) \Rightarrow g(a_1) = g(a_3)$0.5 pts.

(II) (1.0 pto.) Determine $[0]_{\mathcal{R}}$ y $[1]_{\mathcal{R}}$.

Solución

Para conocer $[0]_{\mathcal{R}}$ buscamos los $a \in [0, 1]$ tales que $f(0) = f(a)$

y $g(0) = g(a)$. Como $f(0) = 0$ tenemos que $f(a) = 0 \iff a \in [0, 1)$.

Como $g(0) = 0$ tenemos que $g(a) = 0 \iff a = 0$.

Como deben cumplirse ambas condiciones se concluye que

$[0]_{\mathcal{R}} = \{0\}$.

....0.5 pts.

Como $f(1) = 1$ tenemos que $f(a) = 1 \iff a = 1$ y entonces

$[1]_{\mathcal{R}} = \{1\}$

....0.5 pts.

(III) (1.0 pto.) Determine el conjunto cociente $[0, 1]/\mathcal{R}$.

Solución

Sean $a, b \in (0, 1)$, entonces $f(a) = f(b) = 0$ y $g(a) = g(b) = 1$.

Por lo tanto, $a\mathcal{R}b$. Así $[a]_{\mathcal{R}} = (0, 1)$.

.....0.5 pts.

Se concluye que $[0, 1]/\mathcal{R} = \{[0]_{\mathcal{R}}, [a]_{\mathcal{R}}, [1]_{\mathcal{R}}\} = \{\{0\}, (0, 1), \{1\}\}$ 0.5 pts.

b) Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función arbitraria. Se define $\preceq$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como sigue:

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2, \left((a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff (a_1 \leq a_2 \wedge f(-b_1) \leq f(-b_2)) \right).$$

(2.0 pto.) Demuestre que $\preceq$ es antisimétrica en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si y solamente si f es inyectiva.

Solución

Si para $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se tiene que:

$a_1 \leq a_2$ y $f(-b_1) \leq f(-b_2)$, y $a_2 \leq a_1$ y $f(-b_2) \leq f(-b_1)$, entonces

$a_1 = a_2$ y $f(-b_1) = f(-b_2)$

1.0 pts.

Con esto, la relación es antisimétrica si y solo si

$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, a_1 = a_2 \text{ y } f(-b_1) = f(-b_2) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$...

0.5 pts.

Esto último equivale a que f sea inyectiva

..0.5 pts.

P3. a) (3 ptos.) Para $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea $J_i = \{1, 2, \dots, i\}$. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Muestre que

$$\left| \bigcup_{i=1}^n (\{i\} \times (J_i \setminus J_{(i-1)!})) \right| = n! - 1.$$

Solución

Para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j, \{i\} \times (J_i \setminus J_{(i-1)!})$ y $\{j\} \times (J_j \setminus J_{(j-1)!})$

son disjuntos. Entonces, $\left| \bigcup_{i=1}^n (\{i\} \times (J_i \setminus J_{(i-1)!})) \right| = \sum_{i=1}^n |\{i\} \times J_i \setminus J_{(i-1)!}|$

.....0.6 pts.

Cardinal de un producto cartesiano:

$$|\{i\} \times (J_i \setminus J_{(i-1)!})| = |\{i\}| |J_i \setminus J_{(i-1)!}| = |J_i \setminus J_{(i-1)!}|$$

.....0.6 pts.

Cardinal de una diferencia y $J_{(i-1)!} \subseteq J_i \Rightarrow |J_i \setminus J_{(i-1)!}| = |J_i| - |J_{(i-1)!}|$

.....0.6 pts.

.....Cardinal del conjunto $J_k = \{1, \dots, k\} \Rightarrow |J_i| - |J_{(i-1)!}| = i! - (i-1)!$.

.....0.6 pts.

Calculo final usando propiedad telescópica

$$\left| \bigcup_{i=1}^n (\{i\} \times (J_i \setminus J_{(i-1)!})) \right| = \sum_{i=1}^n (i! - (i-1)!) = n! - 1.$$

.....0.6 pts.

b) (3.0 ptos.) Use el teorema del binomio y la igualdad

$$\binom{m}{k} \binom{m-k}{j} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{k},$$

válida para $0 \leq j, k \leq m$, para demostrar que

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{i=0}^n n! (-2)^i \binom{2n}{n-i} \binom{n+i}{n} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Solución

Usando la igualdad para $m = 2n$, $k = n - i$ y $j = n$ se tiene que

$$\binom{2n}{n-i} \binom{n+i}{n} = \binom{2n}{n-i} \binom{2n-(n-i)}{n} = \binom{2n}{n} \binom{2n-n}{n-i}. \quad \text{.....0.7pts.}$$

Aplicando lo anterior a la suma: $\frac{1}{(2n)!} \sum_{i=0}^n n!(-2)^i \binom{2n}{n-i} \binom{n+i}{n}$

$$= \frac{1}{(2n)!} \sum_{i=0}^n n!(-2)^i \binom{2n}{n} \binom{n}{n-i}$$

$$= \frac{n!}{(2n)!} \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{i=0}^n (-2)^i \binom{n}{n-i} \quad \text{.....0.8pts.}$$

Usando el Teorema del Binomio: $\sum_{i=0}^n (-2)^i \binom{n}{n-i} = (1-2)^n \quad \text{.....1.0pts.}$

$$\text{Se concluye: } \frac{1}{(2n)!} \sum_{i=0}^n n!(-2)^i \binom{2n}{n-i} \binom{n+i}{n} = \frac{1}{n!} (-1)^n \quad \text{.....0.5 pts.}$$