logofcfm-eps-converted-to.pdf

PAUTA CONTROL 2

P1. (6.0 pts.) Sean $A \subseteq E$ y $B \subseteq E$ dos conjuntos. Demuestre que

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \ \wedge \ Y \subseteq B\}.$$

Solución

Demostraremos igualdad de conjuntos probando dos inclusiones.

Primera inclusión: Demostremos que

$$\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \ \wedge \ Y \subseteq B\}.$$

Sea Z un elemento del conjunto $\{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \ \wedge \ Y \subseteq B\}$. Entonces existen $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ tales que $Z = X \cup Y$.

Puntaje: 1.0 si plantea bien un elemento del conjunto.
Pero $X \subseteq A \subseteq A \cup B$ e $Y \subseteq B \subseteq A \cup B$ por lo que $X \cup Y \subseteq A \cup B$.

Así, $X \cup Y \in \mathcal{P}(A \cup B)$ por definición del conjunto potencia de $A \cup B$.

Puntaje: 1.5 si obtuvo la primera inclusión.

Segunda inclusión: Ahora demostremos que

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \ \wedge \ Y \subseteq B\}.$$

Sea $Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$, es decir $Z \subseteq A \cup B$. Veamos que existen $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ tal que $Z = X \cup Y$.

Consideremos los conjuntos $X' = Z \cap A$ e $Y' = Z \cap B$. Claramente $X' \subseteq A$ e $Y' \subseteq B$. Veamos que $Z = X' \cup Y'$ con lo que se probaría lo pedido.

Puntaje: 1.0 si definió los conjuntos X' e Y' u otros tales que $Z = X' \cup Y'$ con $X' \subseteq A$ e $Y' \subseteq B$.

Solución

Demostremos $Z \subseteq X' \cup Y'$: Sea $z \in Z$, como $Z \subseteq A \cup B$ entonces $z \in A \vee z \in B$. Es decir

$$z \in Z \wedge (z \in A \vee z \in B)$$
$$(z \in Z \wedge z \in A) \vee (z \in Z \wedge z \in B)$$
$$(z \in Z \cap A) \vee (z \in Z \cap B)$$
$$z \in (Z \cap A) \cup (Z \cap B)$$
$$z \in X' \cup Y'$$

Con lo que se concluye que $Z \subseteq X' \cup Y'$.

Puntaje: 1.5 si realiza un desarrollo lógico para obtener $Z \subseteq X' \cup Y'$

Demostremos $X' \cup Y' \subseteq Z$: Sea $w \in X' \cup Y'$, por lo tanto $w \in (Z \cap A)$ ó $w \in (Z \cap B)$. En ambos casos $w \in Z$ con lo que se concluye que $X' \cup Y' \subseteq Z$

Puntaje: 1.0 si realiza un desarrollo lógico para obtener $X' \cup Y' \subseteq Z$

Así, se concluye que $Z = X' \cup Y'$ y por lo tanto $Z \in \{X \cup Y \in \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq A \wedge Y \subseteq B\}$. lo que concluye la segunda inclusión.

P2. *a*) Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$, considere la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi(f) = f(0). \end{aligned}$$

(i) (1.5 pts.) Demuestre que φ es epiyectiva.

(ii) (1.5 pts.) Indique si es o no es inyectiva, justificando su respuesta.

Solución

subparte (i): Sea $a \in \mathbb{R}$ un elemento arbitrario del codominio de φ. Demostremos que existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi(f) = a$.
Así debemos buscar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = a$.
Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = a. \end{aligned}$$

En efecto , $\varphi(f) = f(0) = a$.
Puntaje: 1.5 si obtuvo el resultado, justificando correctamente que la función es epiyectiva.
Si no, 0.5 si sólo encontró una función que evaluada en 0 se obtiene un a arbitrario pero no supo concluir.

subparte (ii): Es claro que φ no es inyectiva pues la función f definida antes y la función g definida como

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = a + x. \end{aligned}$$

son dos funciones distintas tales que $\varphi(f) = \varphi(g) = f(0) = a = g(0) = \varphi(g)$.
Puntaje: 1.5 si obtuvo el resultado, dando dos funciones diferentes que al evaluarlas dan lo mismo y concluyendo correctamente que no es inyectiva.
Si no, 0.5 si encontró dos funciones que evaluadas en 0 se obtiene el mismo a pero no supo concluir. También sirve haber mostrado dos funciones que evalaudas en 0 dan un número particular. Por ejemplo f(x)=8 y g(x)=8+x.

b) Sea E un conjunto no vacío. Se define la función identidad en E:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \mathrm{id}_E(x) = x. \end{aligned}$$

Sea $f : E \longrightarrow E$ una función tal que $f \circ f = f$. Demuestre que

(i) (1.5 pts.) f inyectiva $\Longrightarrow f = \mathrm{id}_E$.

(ii) (1.5 pts.) f epiyectiva $\Longrightarrow f = \mathrm{id}_E$.

Solución

subparte (i):
Sea $x \in E$ arbitrario. Veamos que f inyectiva implica $f(x) = x$.
Consideremos $y = f(x)$ un punto de E al que aplicamos la función f. Claramente $f(y) = f(f(x)) = f(x)$. Como f es inyectiva $y = x$, es decir $f(x) = x$ para todo $x \in E$. Se concluye que f es la función identidad.
Puntaje: 1.5 si obtuvo el resultado. Si no, 0.5 si usó correctamente la inyectividad.

subparte (ii):
Sea $x \in E$ arbitrario. Veamos que f epiyectiva implica $f(x) = x$.
Como f es epiyectiva existe $y \in E$ tal que $f(y) = x$.
Aplicando la función f obtenemos $f(f(y)) = f(x)$. Pero $f(f(y)) = f(y)$, así $x = f(y) = f(x)$. Así $f(x) = x$ para todo $x \in E$. Es decir, que f es la función identidad.
Puntaje: 1.5 si obtuvo el resultado. Si no, 0.5 si usó correctamente la epiyectividad.

TIEMPO: 1:15 hrs.
No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.