Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra MA1101-2022-1

Control 2

P1. i) (3.0 pts) Sea E un conjunto de referencia y $A, B \subseteq E$. Pruebe que

$$A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B).$$

Solución: Por doble implicancia.
($\implies$) Por hipótesis se tiene que $A = B$. Luego, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ **(0.6 pts)**
($\impliedby$) *Primera forma:* Por hipótesis se tiene que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Luego,

$$\begin{aligned} A \subseteq A &\iff A \in \mathcal{P}(A) && \text{(por definición de conjunto potencia – \textbf{0.6 pts})} \\ &\iff A \in \mathcal{P}(B) && \text{(por hipótesis – \textbf{0.6 pts})} \\ &\iff A \subseteq B. && \text{(por definición de conjunto potencia – \textbf{0.6 pts})} \end{aligned}$$

Análogamente, $B \subseteq B \implies B \subseteq A$ **(0.6 pts)**.

Segunda forma: Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) &\iff \forall X \subseteq E, (X \in \mathcal{P}(A) \iff X \in \mathcal{P}(B)) \\ & \qquad \text{(por definición de igualdad de conjuntos – \textbf{0.4 pts})} \\ &\iff \forall X \subseteq E, (X \subseteq A \iff X \subseteq B) \\ & \qquad \text{(por definición de conjunto potencia – \textbf{0.5 pts})} \\ &\implies (A \subseteq A \iff A \subseteq B) \land (B \subseteq A \iff B \subseteq B) && \text{(porque } A, B \subseteq E \text{ – \textbf{0.5 pts})} \\ &\iff A \subseteq B \land B \subseteq A && \text{(porque } A \subseteq A \text{ y } B \subseteq B \text{ – \textbf{0.5 pts})} \\ &\iff A = B. && \text{(por doble inclusión – \textbf{0.5 pts})} \end{aligned}$$

Indicaciones para la corrección:

- Si cualquiera de las equivalencias verticalmente alineadas se reemplaza por una implicancia, el argumento sigue estando correcto.
- Si usan (sin demostrarlo) que $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ (ejercicio del apunte) no tienen puntaje.

ii) (3.0 pts) Para cada $c \in \mathbb{R}$ se define el conjunto $A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + 5y = c\}$. Demuestre que $\mathcal{A} = \{A_c \mid c \in \mathbb{R}\}$ es un partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Nota: Recuerde que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es una partición de E si

- $\forall C \in \mathcal{C}$, $C \neq \emptyset$.
- $\forall C, C' \in \mathcal{C}$, $C \neq C' \implies C \cap C' = \emptyset$.
- $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = E$.

Solución: Debemos verificar que se satisfacen las 3 condiciones requeridas para ser una partición. Vale la pena notar antes que, por su definición, los conjuntos A_c en $\mathcal{A}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, así es que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

- **(1 pto.)** Verifiquemos que $\forall c \in \mathbb{R}$, $A_c \neq \emptyset$: En efecto, A_c es una recta con una infinitud de puntos (por ejemplo, $(0, \frac{c}{5}) \in A_c$).

- **(1 pto.)** Verifiquemos que $\forall c, c' \in \mathbb{R},\ c \neq c' \implies A_c \cap A_{c'} = \emptyset$: Por contrarrecíproca, basta verificar que si $A_c \cap A_{c'} \neq \emptyset$, entonces $c = c'$. En efecto,

$$\begin{aligned} A_c \cap A_{c'} \neq \emptyset &\iff \exists (x,y) \in A_c \cap A_{c'} && \text{(por definición de conjunto no vacío)} \\ &\implies (x,y) \in A_c \ \wedge\ (x,y) \in A_{c'} && \text{(por definición de } \cap\text{)} \\ &\iff 2x + 5y = c \ \wedge\ 2x + 5y = c' && \text{(por definición de } A_c, A_{c'}\text{)} \\ &\implies c = c'. \end{aligned}$$

- **(1 pto.)** Verifiquemos que $\bigcup_{c\in\mathbb{R}} A_c = \mathbb{R}^2$: Como cada A_c es subconjunto de $\mathbb{R}^2$, entonces $\bigcup_{c\in\mathbb{R}} A_c \subseteq \mathbb{R}^2$. Solo es necesario demostrar la inclusión contraria. Para ello, observar que

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathbb{R}^2 &\implies \exists c \in \mathbb{R}, c = 2x + 5y \\ &\iff \exists c \in \mathbb{R}, (x,y) \in A_c && \text{(por definición de } A_c\text{)} \\ &\iff (x,y) \in \bigcup_{c\in\mathbb{R}} A_c. && \text{(por definición de unión sobre un conjunto de índices)} \end{aligned}$$

Indicaciones para la corrección:

- Si cualquiera de las equivalencias anteriores se reemplaza por una implicancia, el argumento sigue estando correcto.
- En la demostración de que las partes son disjuntas, muchas/os es posible que no lo hagan por contrarrecíproca, sino que directamente, lo que también es correcto.
- En la demostración de que $\bigcup_{c\in\mathbb{R}} A_c = \mathbb{R}^2$, NO descontar puntaje si el estudiante no se refiere (o se refiere de manera incompleta) a $\bigcup_{c\in\mathbb{R}} A_c \subseteq \mathbb{R}^2$. Si bien en rigor es parte del argumento, lo más usual es que se deje de lado para concentrarse en la otra inclusión.
- Si la/el estudiante presenta un método de resolución correcto, y que no es ninguno de los mencionados anteriormente, dar puntaje completo.

P2. Sea E un conjunto de referencia y $A, B \subseteq E$. Se define $f : \mathcal{P}(A\cup B) \to \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ tal que $f(X) = (X\cap A, X\cap B)$.

a) (2.4 pts) Considere $g : \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A\cup B)$ tal que $g(W,Z) = W \cup Z$, verifique que $g \circ f$ es la función identidad (indique sobre qué conjunto), y concluya que f es inyectiva.

Solución: Como $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Cod}(f)$ la composición $g \circ f$ está bien definida y además

$$\mathrm{Dom}(g\circ f) = \mathrm{Dom}(f) = \mathcal{P}(A\cup B) = \mathrm{Cod}(g) = \mathrm{Cod}(g\circ f).$$

(**0.6 pts por identificar el dominio de la composición**)

Por otro lado, si $X \in \mathcal{P}(A\cup B)$, entonces

$$\begin{aligned} g\circ f(X) &= g(f(X)) && \text{(por definición de } \circ\text{)} \\ &= g(X\cap A, X\cap B) && \text{(por definición de } f \text{ – } \mathbf{0.2\ pts}\text{)} \\ &= (X\cap A)\cup(X\cap B) && \text{(por definición de } g \text{ – } \mathbf{0.2\ pts}\text{)} \\ &= X\cap(X\cup B)\cap(X\cup A)\cap(A\cup B) \\ & && \text{(por idempotencia y distributividad de } \cup \text{ c/r a } \cap \text{ – } \mathbf{0.2\ pts}\text{)} \\ &= X\cap(A\cup B) && \text{(porque } X\subseteq X\cup A \text{ y } X\subseteq X\cup B \text{ – } \mathbf{0.2\ pts}\text{)} \\ &= X. && \text{(porque } X\subseteq A\cup B \text{ – } \mathbf{0.2\ pts}\text{)} \end{aligned}$$

En resumen, hemos establecido que $g\circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A\cup B)}$.

Para concluir la inyectividad de f tenemos dos alternativas:

Primera forma. Usar la propiedad que $h\circ k$ inyectiva implica que k es inyectiva, observar que la función identidad es biyectiva y, del hecho que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A \cup B)}$, concluir que f es inyectiva. **(0.8 pts citar propiedad y concluir)**

Segunda forma. Más engorroso es probar que f satisface la definición de inyectividad, i.e., demostrar que $\forall X, X' \in \mathcal{P}(A \cup B)$, $f(X) = f(X') \implies X = X'$. En efecto,

$$\begin{aligned}
f(X) = f(X') &\iff (X \cap A, X \cap B) = (X' \cap A, X' \cap B) && \text{(por definición de } f\text{)}\\
&\iff X \cap A = X' \cap A \ \wedge \ X \cap B = X' \cap B && \text{(por definición de igualdad de tuplas)}\\
&\implies X \cup (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X' \cap (A \cup B).\\
&\qquad \text{(porque } Y = Z \wedge V = W \implies Y \cup V = Z \cup W \text{ y distributividad de } \cap \text{ c/r a } \cup\text{)}\\
&\iff X = X'. && \text{(porque } X, X' \subseteq A \cup B\text{)}
\end{aligned}$$

(0.8 pts)

Indicaciones para la corrección:

- Si cualquiera de las equivalencias anteriores se reemplaza por una implicancia, el argumento sigue estando correcto.
- Si en el cálculo de la composición combinan dos de los pasos intermedios en un solo paso, asignar la suma de los puntajes correspondientes.

b) (2.4 pts) Pruebe que si $B = A^c$, entonces f es epiyectiva.

Solución: Como $B = A^c$, $A \cup B = A \cup A^c = E$, el dominio de f en este caso es $\mathcal{P}(E)$.

Primera forma. Probar la epiyectividad de f corresponde entonces a verificar que para cada $(W, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A^c)$, existe un $X \in \mathcal{P}(E)$, tal que $f(X) = (W, Z)$. **(0.8 pts. por establecer concretamente a qué corresponde la epiyectividad en este contexto.)**

Esto es, para cada $W \subseteq A$ y cada $Z \subseteq A^c$, hay que probar que existe $X \subseteq E$, tal que $X \cap A = W$ y $X \cap A^c = Z$. Pero para esto basta tomar $X = W \cup Z$. En efecto, como $W \subseteq A$, se tiene que $W \cap A = W$ y $W \cap A^c = \emptyset$, y de manera análoga $Z \cap A = \emptyset$ y $Z \cap A^c = Z$. Así $X \cap A = (W \cup Z) \cap A = (W \cap A) \cup (Z \cap A) = W \cup \emptyset = W$ y análogamente $X \cap A^c = Z$. **(1.6 pts. por determinar X, y verificar que es apropiado, esto es, que intersectado con A y A^c produce W y Z respectivamente.)**

Segunda forma. Podemos también verificar que en este caso, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A^c)}$, y como la identidad es epiyectiva, entonces f deberá serlo también **(0.7 pts)**.

Sea $(W, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A^c)$ cualquiera. Entonces:

$$\begin{aligned}
f \circ g(W, Z) &= f(g(W, Z)) && \text{(por definición de } \circ \text{ – } \textbf{0.25 pts}\text{)}\\
&= f(W \cup Z) && \text{(por definición de } g \text{ – } \textbf{0.25 pts}\text{)}\\
&= ((W \cup Z) \cap A, (W \cup Z) \cap A^c) && \text{(por definición de } f \text{ – } \textbf{0.25 pts}\text{)}\\
&= ((W \cap A) \cup (Z \cap A), (W \cap A^c) \cup (Z \cap A^c))\\
&&& \text{(por distributividad de } \cap \text{ c/r a } \cup \text{ – } \textbf{0.25 pts}\text{)}\\
&= (W \cup \emptyset, \emptyset \cup Z) && \text{(cálculos indicados en la primera forma – } \textbf{0.7 pts}\text{)}\\
&= (W, Z).
\end{aligned}$$

Indicaciones para la corrección:

- Si en la segunda forma combinan dos de los pasos intermedios en un solo paso, asignar la suma de los puntajes correspondientes.
- En la segunda forma, es también absolutamente correcto concluir la epiyectividad de f a partir de que $f \circ g$ es la identidad, diciendo que por la parte b), también $g \circ f$ es la identidad, y por lo tanto por una propiedad conocida, f es biyectiva (y luego epiyectiva). Ese argumento también recibe los

0.7 pts iniciales.

c) (1.2 pts) Muestre, con un contraejemplo, que si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces f no es epiyectiva. Esto es, dé un ejemplo concreto de conjuntos A, B, E tales que $A, B \subseteq E$, $A \cap B \neq \emptyset$, y f no es epiyectiva.

Solución: Cualquier ejemplo en el que $A \cap B \neq \emptyset$ y para el cual se elijan $W \subseteq A$ y $Z \subseteq B$ tales que $W \cap B \neq Z \cap A$ sirve como contraejemplo, puesto que si $(W, Z) = f(X)$, esto es, si $W = X \cap A$ y $Z = X \cap B$, entonces $W \cap B = X \cap A \cap B$ y así $Z \cap A = X \cap B \cap A = W \cap B$.

Por ejemplo, se puede considerar $E = \{1\}$, $A = B = \{1\}$, $W = \{1\} \subseteq A$, $Z = \emptyset \subseteq B$. Aquí $W \cap B = \{1\}$, pero $Z \cap A = \emptyset$. **(0.6 pts. por enunciar un contraejemplo correcto, y 0.6 pts. por mostrar que efectivamente es un contraejemplo.)**

Indicaciones para la corrección: La verificación de que el ejemplo que exhiban es un contraejemplo puede ser con una justificación como la indicada aquí, pero pueden haber otras formas, por ejemplo, si el ejemplo escogido involucra solo conjuntos finitos pequeños, podrían exhibir todas las imágenes de f y verificar que no constituyen todo el codominio.

Duración: 1 hora y 15 minutos.