



Control 2

P1. a) (3.0 pts) Para $n \in \mathbb{N}$ se definen, $s_{2n} = \sum_{i=0}^n \binom{2n+1-i}{i}$ y $s_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{2(n+1)-i}{i}$.

Pruebe, sin usar inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{2(n+1)} = s_{2n+1} + s_{2n}$.

b) Un *alfabeto* se define como un conjunto finito de símbolos o caracteres. Para un alfabeto A y $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$, llamamos *palabra de largo ℓ sobre el alfabeto A* a una secuencia finita de caracteres en A . Por ejemplo, *abba* y *aabaa* son palabras sobre el alfabeto $A = \{a, b\}$, de largos 4 y 5 respectivamente.

b.1.) (1.5 pts) Sea $\ell \geq 1$. Determine el número de palabras de largo ℓ sobre el alfabeto $\{a, b\}$

b.2.) (1.5 pts) Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de palabras sobre el alfabeto $\{a, b\}$. Pruebe que $\mathcal{S}$ es numerable.

Solución.

a) En efecto,

$$\begin{aligned} s_{2(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{2(n+1)+1-i}{i} && \text{(Definición de } s_{2(n+1)}) \\ &= \binom{2(n+1)+1}{0} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{2(n+1)+1-i}{i} && ((0.5 \text{ pts})) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \left[\binom{2(n+1)-i}{i} + \binom{2(n+1)-i}{i-1} \right] && \text{(Porque } \binom{a}{0} = 0 \text{ e Identidad de Pascal (0.9 pts))} \\ &= \binom{2(n+1)}{0} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{2(n+1)-i}{i} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{2(n+1)-i}{i-1} && \text{(Porque } \binom{a}{0} = 1 \text{ y propiedades de sumatorias (0.5 pts))} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{2(n+1)-i}{i} + \sum_{j=0}^n \binom{2(n+1)-(j+1)}{j} && \text{(Cambio de índice } j = i - 1 \text{ (0.9 pts))} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{2(n+1)-i}{i} + \sum_{j=0}^n \binom{2n+1-j}{j} && ((0.2 \text{ pts})) \\ &= s_{2n+1} + s_{2n}. && \text{(Definición de } s_{2n+1} \text{ y } s_{2n}) \end{aligned}$$

b.1.) Sea $\mathcal{S}_\ell$ el conjunto de palabras de largo ℓ sobre el alfabeto $\{a, b\}$. Podemos representar cada elemento de $\mathcal{S}_\ell$ como una tupla de largo ℓ a coordenadas en $\{a, b\}$, i.e., como un elemento de $\{a, b\}^\ell$. Esta representación es única. Formalmente, $f : \{a, b\}^\ell \rightarrow \mathcal{S}_\ell$ tal que $f((c_1, c_2, \dots, c_\ell)) = (c_1, c_2, \dots, c_\ell)$ es biyección (0.7 pts por argumentar que $\mathcal{S}_\ell$ esta en correspondencia 1-a-1 con $\{a, b\}^\ell$). Sigue, aplicando la regla del producto, que $|\mathcal{S}_\ell| = |\{a, b\}^\ell| = |\{a, b\}|^\ell = 2^\ell$ (0.4 pts por invocar o aplicar la regla del producto y concluir y 0.4 pts por determinar correctamente la cardinalidad de $\mathcal{S}_\ell$).

b.2.) Observar que $\mathcal{S} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}^*} \mathcal{S}_\ell$ (0.4 pts por expresar $\mathcal{S}$ como unión numerable de conjuntos finitos o numerables). Luego, dado que unión numerable de conjuntos finitos o numerables es finito o numerable, se tiene que $|\mathcal{S}| \leq |\mathbb{N}|$ (0.3 pts por invocar resultado y concluir).

Para concluir, basta con mostrar que $\mathcal{S}$ es infinito (porque si un conjunto infinito C es tal que $|C| \leq |\mathbb{N}|$, entonces C es numerable). En efecto, como $\underbrace{aa\dots a}_{\ell \text{ veces}} \in \mathcal{S}_\ell$ para todo $\ell \geq 1$, sigue que $\mathcal{S}_\ell$ es infinito (0.4 pts por argumentar que $\mathcal{S}$ es infinito y 0.4 pts por invocar el resultado que caracteriza numerabilidad).

P2. Sea $(G, \star)$ un grupo con neutro $e \in G$. Sea $\mathcal{R}$ una relación de **orden** en G que verifica la siguiente propiedad,

$$\forall x, y, z \in G, x\mathcal{R}y \implies x \star z\mathcal{R}y \star z.$$

Sean $G_+ = \{g \in G \mid e\mathcal{R}g\}$ y $G_- = \{g \in G \mid g\mathcal{R}e\}$.

- (1.5 pts) Pruebe que $G_+ \cap G_- = \{e\}$.
- (1.5 pts) Pruebe que $\forall g \in G, g \in G_+ \implies g^{-1} \in G_-$.
- (1.5 pts) Pruebe que $(G_+, \star)$ es una estructura algebraica (es decir, que $\star$ es una ley de composición interna en G_+).

Asuma que el resultado de la parte c) sigue siendo válido al reemplazar G_+ por G_- (no lo demuestre).

- (1.5 pts) Pruebe que si G es abeliano, entonces $(G_+, \star)$ y $(G_-, \star)$ son estructuras algebraicas isomorfas.

Solución.

- Debemos mostrar una igualdad de conjuntos, para lo cual procedemos por doble inclusión (0.2 pts). Por la reflexividad de $\mathcal{R}$, se cumple que $e\mathcal{R}e$, con lo cual $e \in G_+$ y $e \in G_-$. Luego, $e \in G_+ \cap G_-$ (0.3 pts). Así, $\{e\} \subseteq G_+ \cap G_-$ (0.2 pts). Veamos ahora que $G_+ \cap G_- \subseteq \{e\}$. Sea $g \in G_+ \cap G_-$ cualquiera. Como $g \in G_+$, sigue que $e\mathcal{R}g$; como $g \in G_-$, se tiene que $g\mathcal{R}e$. Así, tenemos que $g\mathcal{R}e$ y $e\mathcal{R}g$ (0.2 pts). Por antisimetría de $\mathcal{R}$, necesariamente se tiene que $g = e$, o, equivalentemente, $g \in \{e\}$ (0.3 pts). Como $g \in G_+$ es un elemento cualquiera, concluimos que $\forall g \in G_+ \cap G_-, g \in \{e\}$. Esto prueba que $G_+ \cap G_- \subseteq \{e\}$ y concluye la demostración (0.3 pts).
- Sea $g \in G$ cualquiera y supongamos que $g \in G_+$.

$$\begin{aligned} g \in G_+ &\iff e\mathcal{R}g && \text{(por definición de } G_+ \text{ (0.25 pts))} \\ &\implies e \star g^{-1}\mathcal{R}g \star g^{-1} && \text{(por la propiedad indicada en el enunciado (0.5 pts))} \\ &\iff g^{-1}\mathcal{R}e && \text{(porque } e \text{ es el neutro y } g^{-1} \text{ es el inverso de } g \text{ (0.5 pts))} \\ &\iff g^{-1} \in G_- && \text{(por definición de } G_- \text{ (0.25 pts))} \end{aligned}$$

Como $g \in G$ es un elemento cualquiera, concluimos que $\forall g \in G, g \in G_+ \implies g^{-1} \in G_-$.

- Para probar que $(G_+, \star)$ es una estructura algebraica, debemos mostrar que $\forall g, h \in G_+, g \star h \in G_+$ (0.2 pts). Sean $g, h \in G_+$ cualesquiera. Como $h \in G_+$, de la parte b) sabemos que $h^{-1} \in G_-$, con lo que obtenemos que $h^{-1}\mathcal{R}e$ y $e\mathcal{R}g$ (0.4 pts). Por transitividad de $\mathcal{R}$, esto implica que $h^{-1}\mathcal{R}g$ (0.3 pts). Usando la propiedad indicada en el enunciado, tenemos que

$$\begin{aligned} h^{-1}\mathcal{R}g &\implies h^{-1} \star h\mathcal{R}g \star h && \text{((0.2 pts))} \\ &\iff e\mathcal{R}g \star h && \text{(porque } h^{-1} \text{ es el inverso de } h \text{ (0.2 pts))} \\ &\iff g \star h \in G_+, && \text{(por definición de } G_+ \text{ (0.2 pts))} \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

- Consideremos la función $\varphi : G_+ \rightarrow G_-$ definida por $\varphi(g) = g^{-1}$, $\forall g \in G_+$. Notemos que esta función está bien definida ya que de la parte b) sabemos que si $g \in G_+$, entonces $g^{-1} \in G_-$ (0.3 pts).

Veamos que φ es un homomorfismo. Sean $g, h \in G_+$,

$$\varphi(g \star h) = (g \star h)^{-1} = h^{-1} \star g^{-1}. \quad (0.2 \text{ pts})$$

Como G es abeliano, tenemos que $h^{-1} \star g^{-1} = g^{-1} \star h^{-1} = \varphi(g) \star \varphi(h)$. Así, φ es un homomorfismo (0.2 pts).

Veamos ahora que φ es biyectiva. Notemos que $\forall g \in G_-, g^{-1} \in G_+$. En efecto, podemos proceder de modo análogo que en b) para obtener que

$$\begin{aligned} g \in G_- &\iff g\mathcal{R}e && \text{(por definición de } G_-) \\ &\implies g \star g^{-1}\mathcal{R}e \star g^{-1} && \text{(por la propiedad indicada en el enunciado)} \\ &\iff e\mathcal{R}g^{-1} && \text{(porque } e \text{ es el neutro y } g^{-1} \text{ es el inverso de } g) \\ &\iff g^{-1} \in G_+. && \text{(por definición de } G_+ \text{ (0.3 pts))} \end{aligned}$$

Esto permite definir la función $\tilde{\varphi} : G_- \rightarrow G_+$ por $\tilde{\varphi}(g) = g^{-1}, \forall g \in G_-$. Notemos que $\varphi \circ \tilde{\varphi} = id_{G_-}$ y $\tilde{\varphi} \circ \varphi = Id_{G_+}$, por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es la inversa de φ , lo que nos permite concluir que φ es biyectiva (0.3 pts).

Así, φ es un isomorfismo entre $(G_+, \star)$ y $(G_-, \star)$ (0.2 pts).

Indicaciones corrección. En caso de que se demuestre inyectividad y epiyectividad de φ separadamente, asignar 0.3 pts a inyectividad y 0.3 pts a epiyectividad. Mantener los 0.2 pts por la conclusión.

Duración: 2 horas.