PAUTA CONTROL 2 - ANEXO

Desarrollo alternativo **P1.-** *(b)*

P1.- Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante fija. Considere el siguiente sistema lineal no homogéneo:

$$x' = (2a+1)x - (2a+2)y + 3e^{-2t} - 2te^{-t}$$
$$y' = 2ax - (2a+1)y - 2te^{-t}$$

(a) Encuentre A y $B(t)$ de modo que el sistema adopte la forma $X' = AX + B(t)$

(b) Calcule e^{tA}.

Solución: El polinomio característico de la matriz A está dado por:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - (2a+1) & 2a+2 \\ -2a & \lambda + (2a+1) \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2a+1)^2 + 2a(2a+2) = \lambda^2 - 1, \quad (1)$$

cuyos ceros (valores propios de A) son 1 y -1.

Resolvemos los sistemas de ecuaciones $(A \pm I)V = 0$, para calcular los vectores propios asociados. Obtenemos, en cada caso:

$$\boxed{\lambda = +1} \qquad \begin{bmatrix} 2a & -(2a+2) \\ 2a & -(2a+2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 2au - (2a+2)v = 0$$

$$\implies E_{+1}(A) = \left\langle \begin{bmatrix} a+1 \\ a \end{bmatrix} \right\rangle \quad (2)$$

$$\boxed{\lambda = -1} \qquad \begin{bmatrix} 2a+2 & -(2a+2) \\ 2a & -2a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies u - v = 0$$

$$\implies E_{-1}(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3)$$

La matriz cuyas columnas son $e^t \begin{bmatrix} a+1 \\ a \end{bmatrix}$ y $e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una matriz fundamental para el sistema. Llamémosla $M(t)$.

$$M(t) = \begin{bmatrix} (a+1)e^t & e^{-t} \\ ae^t & e^{-t} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Como e^{tA} es la matriz fundamental canónica del sistema para $t = 0$, entonces

$$\begin{aligned} e^{tA} &= M(t)M(0)^{-1} \qquad (5) \\ &= \begin{bmatrix} (a+1)e^t & e^{-t} \\ ae^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (a+1)e^t & e^{-t} \\ ae^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & a+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a+1)e^t - ae^{-t} & (a+1)(e^{-t} - e^t) \\ a(e^t - e^{-t}) & (a+1)e^{-t} - ae^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Puntaje:

- Calcula el polinomio característico. (0,2 pts.)
- Calcula los valores propios. (0,2 pts.)
- Para cada valor propio escoge un vector propio. (0,3 pts.)
- Establece una matriz fundamental (4) eligiendo un vector columna por cada valor propio, multiplicado por la respectiva exponencial (puede dar diferente dependiendo de la elección de los vectores propios). (0,4 pts.)
- Establece la relación (5) entre la exponencial y la matriz fundamental y justificando que la exponencial es la fundamental canónica. (0,5 pts.)
- Calcula $M(0)^{-1}$ (0,2 pts.)
- Desarrolla hasta encontrar e^{tA}. (0,2 pts.)

(c) Encuentre la solución general del sistema.

(d) Fije $a = 0$. Elija un vector X_0 tal que si $X(0) = X_0$, entonces $X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.