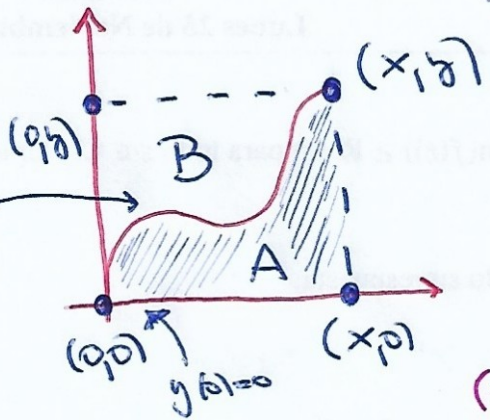


[P1] a)

gráfica
 $y=f(x)$



$$A(x) = \int_0^x f(u) du$$

real > 0

Se tiene que $B = kA$

$$\Rightarrow \boxed{A+B = xy} \text{ (como área)}$$

(0,5) pts

$$(k+1)A(x) = xy$$

/ d/dx

(0,3 pts)

Como $y=f(x)$ es derivable

$$\text{por TFC} \Rightarrow \hat{A}(x) = f(x) = y \Rightarrow (k+1)\hat{A}(x) = y + xy'$$

(1 pto)

(0,2 pts)

$$\Leftrightarrow (k+1)y = y + xy'$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ky = xy'} \text{ (EDO VARS SEP)}$$

SEPARANDO VARIABLES

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{k}{x} dx + C$$

E INTEGRANDO

(trabajando $x > 0$)

($y \equiv 0$ soluc cte)

NO sirve!

$$\text{w e e o } \ln|y| = \ln|x^k A| \Leftrightarrow$$

$$(A = \ln C) \text{ (0,3 pts)}$$

$y > 0$

$x > 0$

$$y = Ax^k \quad A \in \mathbb{R}^+$$

FAMILIA BUSCADA

(0,2 pts)

$$\{x \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(x) = Ax^k, A > 0\}$$

$$b) \quad y' = \frac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} (\ln(y/x) + 1)$$

Forma

$$y' = f(y/x)$$

$$y(1) = 2$$

PVI

$x > 0$

$$\forall x > 0 \Rightarrow y(x) > 0 \quad (*)$$

Obs: $y \equiv 0$ NO es soluc!!

$\therefore \ln(1)?$

con la sustitución $y = zx$ (0,5 pts)

$$\Rightarrow y' = xz' + z \text{ queda (} z > 0 \text{ pues (*)}$$

$$xz' + z = z(\ln(z) + 1)$$

(1 pto)

$$\Leftrightarrow (xz)' = z \ln(z)$$

EDO VARS SEPARABLES

Luego separando variables e integrando

$$\int \frac{dz}{z \ln z} = \int \frac{dx}{x} + C \Leftrightarrow \ln(|\ln z|) = \underbrace{\ln|x| + C}_{\ln(Ax)} \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$\ln(Ax) \stackrel{x \neq 0}{\sim} A = \ln(C)$$

mantenemos módulo
por no sabemos
si $z \in]0,1[$ o $z \geq 1$

$$\Leftrightarrow |\ln z| = Ax$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \pm Ax \quad \text{pero } y(1) = 2 \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \pm A \Rightarrow \text{el signo correcto es } + !!$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(2) = A} \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow y(x) = x e^{x \ln(2)} = x e^{\ln(2^x)}$$

$$= \boxed{x 2^x} \quad \checkmark \quad (0,5 \text{ pts})$$

$x \mapsto y(x) = x 2^x$
 $x > 0$ cumple el PVI
 $y(1) = 2$

OBS en $xz' = z \ln(z)$ "la solución" $z(x) = 1 \quad \forall x > 0$

cumple $x \cdot 0 = 1 \cdot \ln(1) \checkmark$ pero **NO** cumple la condición inicial. $\checkmark$

$$z(1) = y(1) = \frac{2}{1} = 2$$

ooo

[P2] a) $\dot{y} = 1 + e^{y-x+5}$ (0,5 pts)
 Consideremos la sustitución $u = y - x + 5 \Rightarrow \dot{u} = \dot{y} - 1$ luego la EDO
 Ahora en u queda $\dot{u} + 1 = 1 + e^u \Leftrightarrow \dot{u} = e^u$ EDO a vns
 separables en u (NO hay soluc ctes en este caso) (0,5 pts)

$\Rightarrow$ Separando variables e integrando $\int \frac{du}{e^u} = \int dx + C \Leftrightarrow -e^{-u} = x + C$ (0,5 pts)

$\Leftrightarrow e^{-u} = B - x \Leftrightarrow e^u = \frac{1}{B-x} \Rightarrow x \mapsto y(x) = x - 5 + \ln\left(\frac{1}{B-x}\right)$
 (B = -C) (0,5 pts)
 volviendo a la variable original (0,5 pts)
 Definida en $x \in]-\infty, B[$ como solución!

b) $I \subset \mathbb{R}$ tq $y(x) \infty \forall x \in I$, y derivable en I (0,5 pts)

(1) $\dot{y} + p(x)y = q(x)\ln(y)$ $\Leftrightarrow \frac{\dot{y}}{y} + p(x) = q(x)\ln(y)$, $x \in I$

Como $v = \ln(y) \Rightarrow v' = \frac{\dot{y}}{y}$ $\Rightarrow v' - q(x)v = -p(x)$, $x \in I$
 es derivable por R-C (0,5 pts)
 EDO lineal en v (0,5 pts)

(2) $I =]0, +\infty[$, $q(x) = -\frac{2}{x}$, $p(x) = e^x$ resolver la EDO anterior.

$$v' - q(x)v = -p(x) \Leftrightarrow v' + \frac{2}{x}v = -e^x$$

(0,5 pts)

F.I $\phi = e^{\int -q(x)} = e^{\int 2/x dx} = e^{2 \ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2 \quad //$

$x > 0$

(0,5 pts)

$$\Rightarrow v = \phi^{-1} \left\{ \int \phi \cdot p(x) dx + C \right\}$$

$$= x^{-2} \left\{ - \int x^2 e^x dx + C \right\}$$

(0,5 pts)

IPP

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 e^x (x - 1)$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x^2} \left\{ -e^x (x^2 - 2(x - 1)) + C \right\}$$

$v = \ln(y)$
where A
is the
original!

$$\Rightarrow y = e^{\frac{1}{x^2} (-e^x (x^2 - 2(x - 1)) + C)}$$

$C \in \mathbb{R}$
 $x > 0$

(0,5 pts)

[P3] a) $\frac{dp}{dt} + \operatorname{tg}(t)p = \operatorname{sen}^3 t p^2$, $p(0) = \pi^2/6$
 $t \in]0, \pi/2[$

5

SE TRATA DE UNA EDO BERNOLLI con $m=2$, luego con la sustitución $z = p^{-1}$ se llega a la EDO LINEAL en z

$$z' - 1 \cdot \operatorname{tg}(t)z = -1 \cdot \operatorname{sen}^3 t$$

un FACTOR INTEGRANTE $\phi = e^{-\int \operatorname{tg}(t) dt} = e^{\ln|\cos t|} = \cos t$ $t \in]0, \pi/2[\Rightarrow \cos t > 0$ $\leftarrow (1 \text{ pts})$

luego $z = \cos^{-1} t \left\{ -\int \operatorname{sen}^3 t \cdot \cos t dt + C \right\} \leftarrow (0,5 \text{ pts})$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p(t)} = \frac{1}{\cos t} \left(-\frac{\operatorname{sen}^4 t}{4} + C \right) \leftarrow (0,5 \text{ pts})$$

Como $p(0) = \pi^2/6 \Rightarrow C = 6/\pi^2$, y luego $\leftarrow (0,5 \text{ pts})$

$$t \mapsto p(t) = \frac{\cos t}{\frac{6}{\pi^2} - \frac{\operatorname{sen}^4 t}{4}}$$

$\leftarrow (0,5 \text{ pts})$

Notamos que

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} p(t) = 0$$

$\leftarrow (0,5 \text{ pts})$

$\Rightarrow$ en $T = \frac{\pi}{2}$ la civilización desaparece!

b) $y'' - e^x y + y^2 = e^x$, es una EDO tipo Riccati 6
(0,2 pts)

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x), \quad p(x) = -e^x, \quad q(x) = 1, \quad r(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}.$$

(0,3 pts)

Se verifica que $x \mapsto y_p(x) = e^x$ es solución particular

$$(e^x - e^x \cdot e^x + e^{2x} = e^x) \Rightarrow \text{con el cambio } y = e^x + 1/2$$

se llega a la EDO lineal en z :

$$z' + z(e^x - 2e^x) = 1$$

(0,5 pts)

$$\Leftrightarrow z' - e^x z = 1 \quad \text{cuyo factor integrante}$$

$$\phi = e^{-\int e^x dx} = \boxed{e^{-e^x}}$$

(0,5 pts)

$$\Rightarrow z = e^{e^x} \left\{ \int e^{-e^x} dx + C \right\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(0,3 pts)
0,3

$$\Rightarrow y = e^x + \frac{e^{-e^x}}{\int e^{-e^x} dx + C}$$

(0,5 pts)

solución genl def en todo $\mathbb{R}$.