Universidad de Chile. FCFM-DIM

Pauta Control 1 Coordinado: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Primavera 2024

Profesoras: Gabrielle Nornberg y Jessica Trespalacios.

P1. Calentamiento Global:

a) (1pt) Las soluciones estacionarias corresponde a las soluciones constantes del modelo, esto es T(t) talq ue:

$$\begin{cases} 0 = S(1-\alpha) - A - BT, \quad \text{desjando} \\ T = \frac{S(1-\alpha)-A}{B}. \end{cases} \tag{1}$$

b) (3pts) Reescribirmos la ecuación como sigue:

$$(CG) \qquad \frac{dT(t)}{dt} + \frac{B}{R} = \frac{S(1-\alpha)-A}{R}, \tag{2}$$

usamos el factor Integrante $e^{(B/R)t}$ y multiplicamos en ambos lados de la ecuación (2) (Hasta aquí 0.5 pt.). Obtenemos:

$$\begin{cases} e^{\frac{B}{R}t}T'(t) + e^{\frac{B}{R}t}\frac{B}{R}T(t) = \frac{S(1-\alpha)-A}{R}e^{\frac{B}{R}t} \\ \left(e^{\frac{B}{R}t}T(t)\right)' = \frac{S(1-\alpha)-A}{R}e^{\frac{B}{R}t} \\ (\text{Para esta parte 1 pt}) \end{cases} \tag{3}$$

Ahora como $T(0) = T_0$ podemos usar TFC para escribir:

$$\begin{aligned} e^{\frac{B}{R}t}T(t) &= \left(e^{\frac{B}{R}t}T(t)\right)|_{t=0} + \frac{S(1-\alpha)-A}{R}\int_0^t e^{\frac{B}{R}s}ds \\ e^{\frac{B}{R}t}T(t) &= T_0 + \left(\frac{S(1-\alpha)-A}{R}\right)\frac{R}{B}\left[e^{\frac{B}{R}t} - 1\right] \\ T(t) &= \left[T_0 - \frac{S(1-\alpha)-A}{B}\right]e^{-\frac{B}{R}t} + \frac{S(1-\alpha)-A}{B} \end{aligned} \tag{4}$$

Por toda esta última parte 1.5 pts.

c) (2pts) Como sabemos los valores de los parámetros $A = 202$ y $B = 1,9$ y además la radiación saliente en el período actual es 231,26, entonces usar está información en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (\text{Radiación saliente en período actual} \quad (t=0)) &= A + BT(0) \\ 231,26 &= 202 + 1,90(T_0) \quad \text{despejando} \\ T_0 &= 15,4 \checkmark \text{esta es la condición incial!} \end{aligned} \tag{5}$$

Hasta aquí 1.5 pt. Ahora con la información se tiene que **Energía total promedio del Sol**:$= S(1-\alpha) = 239,4$, por lo tanto, reemplazando en la ecuación (4) (última fila) se obtiene:

$$\begin{aligned} T(t) &= \left[15,4 - \frac{239,4-202}{1,9}\right] e^{-\frac{1,9}{R}t} + \frac{239,4-202}{1,9} \\ T(t) &= 4,07 e^{-\frac{1,9}{R}t} + 19,68. \end{aligned} \tag{6}$$

Por esta última parte 0,5, pueden dejar los números indicados y igual tendrían los puntos!

P2. Dinámica de poblaciones:

a) (1pt) Como partimos del hecho que (C) es cierta, tomamos la derivada en (C) y obtenemos:

$$x'_A(t) + x'_B(t) = 0 \qquad \text{0.3 pts}$$

Ahora usando (D) podemos sumar los lados derechos de cada ecuación e igualar a cero:

$$\begin{aligned} &x_A(t)(a-\phi(t)) + x_B(t)(b-\phi(t)) = 0, \qquad \text{distribuyendo y agrupando} \\ &ax_A(t) - \phi(t)x_A(t) + bx_B(t) - \phi(t)x_B(t) = 0 \\ &-\phi(t)\underbrace{(x_A(t)+x_B(t))}_{=1} = -ax_A(t) - bx_B(t) \\ &\phi(t) = ax_A(t) + bx_A(t)\checkmark \end{aligned} \tag{7}$$

Por esta última parte (lo que está en ecuación (7)) 0.7 pts.

b) (1pt) Ahora, reemplazando $\phi(t)$ en la primera ecuación de (D) obtenemos:

$$x'_A(t) = x_A(t)(a - ax_A(t) - bx_B(t) \qquad 0{,}2 pts \tag{8}$$

Usando la primera ecuación de (C) tenemos que $x_B(t) = 1 - x_A(t)$, así que reemplazamos en (8):

$$\begin{aligned} x'_A(t) &= x_A(t)(a - ax_A(t) - b(1-x_A(t))) \\ x'_A(t) &= x_A(t)(a - b + (a-b)(-x_A(t))) \\ x'_A(t &= -(a-b)x_A(t)(x_A(t)-1) \end{aligned}$$

para esta última parte 0.8 pts

c) 1pt Las soluciones estacionarias son las soluciones constantes de (E), por lo tanto si igualamos a cero obtenemos:

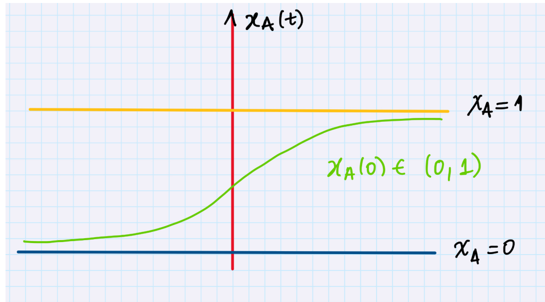
$$-(a-b)x_A(t)(x_A(t)-1) = 0$$

así $x_A(t) = 0$ y $x_A(t) = 1$, Hasta aquí 0.2 pts. Debemos considerar dos casos:

Caso 1: (a>b). (0.4 pts) entonces $-(a-b) < 0$ y como tenemos que $0 < x_A(t) < 1$, entonces $x_A(t) - 1 < 0$, así

$$x'_A(t) > 0 \quad \text{lo que implica que} \quad x_A(t) \quad \text{sea creciente cuando} \quad x(0) \in (0,1)$$

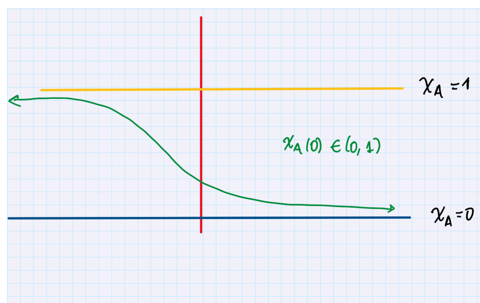
Esto se puede ver en el siguiente esquema:



Caso 2: (b>a) (0.4 pts) entonces $-(a-b) > 0$ y como tenemos que $0 < x_A(t) < 1$, entonces $x_A(t) - 1 < 0$, así

$$x_A'(t) < 0 \quad \text{lo que implica que} \quad x_A(t) \quad \text{sea decreciente cuando} \quad x(0) \in (0,1)$$

Esto se puede ver en el siguiente esquema:



d) (3pts). Ahora vamos a resolver la EDO (E), por la estructura podemos hacer **separación de variables**(también puede hacerse por Bernoulli): Suponiendo que $x_A(t)$ no es solución estacionaria del problema (esto es $x_A(t) \neq 0$ y $x_A(t) \neq 1$) podemos escribir:

$$\frac{x_A'(t)}{x_A(t)(x_A(t)-1)} = -(a-b)$$

Usando el cambio de variable $x = x_A(t)$ entonces $dx = x_A'(t)dt$ entonces integrando obtenemos

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = -\int (a-b)dt \tag{9}$$

Usando fracciones parciales, buscamos A y B tal que:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)},$$

por lo tanto se deduce que $-A = 1$ y $B = -A = 1$, reemplazando en la integral:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| - \ln|x|, \tag{10}$$

Hasta aquí 1.3pts. Ahora reemplazando (10) en (9), usando que $0 < x < 1$ y las propiedades del logaritmo:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) &= -(a-b)t + C_1 \quad \text{aplican propiedades Log. y Exp.,} \\
\frac{1-x}{x} &= e^{C_1-(a-b)t} \\
1-x &= xCe^{-(a-b)t}, \qquad \text{aquí} \quad C = \exp(C_1), \\
x\left(Ce^{-(a-b)t}+1\right) &= 1 \\
x &= \frac{1}{Ce^{-(a-b)t}+1}
\end{aligned} \tag{11}$$

por lo tanto, nuestra solución es:

$$x_A(t) = \frac{1}{Ce^{-(a-b)t}+1}. \tag{12}$$

Esta parte 1.3 pts. Finalmente, analizamos que pasa con la solución cuando $t \longrightarrow +\infty$:
Si $a > b$ entonces

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} x_A(t) = 1, \quad \text{dado que} \quad \lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{-(a-b)t} = 0$$

por lo tanto la población de A invade completamente a la de B.

Si $b > a$ entonces

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} x_A(t) = 0, \quad \text{dado que} \quad \lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{-(a-b)t} = +\infty$$

por lo tanto la población de B invade completamente a la de A. Estas conclusiones finales vale 0.4 pts.

P3. Ecuación de Ricatti:

a) (3pts) Si usamos la sustitución indicada $y(t) = y_1(t) + u(t)$, la ecuación se reescribe como:

$$\begin{aligned}
y_1'(t) + u'(t) &= P(t) + Q(t)(y_1(t)+u(t)) + R(t)(y_1^2(t) + 2y_1(t)u(t) + u(t)^2) \\
y_1'(t) + u'(t) &= P(t) + Q(t)y_1(t) + Q(t)u(t) + R(t)y_1^2(t) + 2R(t)y_1(t)u(t) + R(t)u(t)^2
\end{aligned}$$

Su usamos que $y_1(t)$ es solución particular, lo que está en azul se simplifica (se cancela), así que la ecuación nos queda:

$$u'(t) = (Q(t) + 2R(t)y_1(t))u(t) + R(t)u(t)^2 \tag{13}$$

La anterior es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$, Hasta aquí 1.5 pts.
Ahora, si usamos la sustitución $w = u^{-1}$ y tomamos la derivada obtenemos $w'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$.
Luego, sustituimos en (13) y obtenemos:

$$\begin{aligned}
-w'(t)u^2(t) &= (Q(t) + 2R(t)y_1)u + R(t)u^2 \\
-w'(t) &= (Q(t) + 2R(t)y_1(t))\frac{1}{u} + R(t),
\end{aligned} \tag{14}$$

por lo tanto

$$w'(t) = -(Q(t) + 2R(t)y_1(t))w(t) - R(t) \tag{15}$$

Esta es la ecuación lineal. Esta última parte 1.5 pts.!

b) (3pts.) Podemos aplicar directamente lo obtenido en la parte (a) y reconocer que $P(t) = t^2$, $Q(t) = 1/t$, $R(t) = -1$ y $y_1(t) = t$ por lo tanto la ecuación nos queda:

$$w'(t) = -\left(\frac{1}{t} - 2t\right) w(t) + 1, \tag{16}$$

podemos resolver usando el factor integrante $\mu(t) = \int \left(\frac{1}{t} - 2t\right) dt = e^{\ln t - t^2} = te^{-t^2}$, hasta aquí 1pts. Ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned} (\mu(t)w(t))' &= te^{-t^2} \\ te^{-t^2} w(t) &= \int te^{-t^2} dt \\ te^{-t^2} w(t) &= -\frac{1}{2}e^{-t^2} + C \\ w(t) &= \frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2} + Ce^{t^2}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Esta 2da parte 1pt.

Regresando a la sustitución original

$$y(t) = y_1 + u = t + \frac{1}{w} = t + \frac{t}{-\frac{1}{2} + Ce^{t^2}} \tag{18}$$

Ahora usando la condición inicial y(1)=2, obtenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{Ce - \frac{1}{2}} \\ Ce - \frac{1}{2} &= 1 \\ C &= \frac{3}{2e} \checkmark \end{aligned} \tag{19}$$

Esta última parte 1pt.