Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2025-1, Coordinado.
Miércoles 2 de Abril. Profesores: Sa. Martínez, F. Ortega, A. Osses

PAUTA CONTROL 1

P1. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) (2 ptos) $xyy' = y^2 - x^2$, $x > 0$.

Solución

Despejando y' se obtiene $y' = \frac{y^2-x^2}{xy}$ que es una EDO homogénea. $\leftarrow$ [0,5 pts].
Haciendo el cambio de variables $z = y/x$ se obtiene $xz' + z = \frac{z^2-1}{z}$ $\leftarrow$ [0,5 pts]. es decir $z' = -\frac{1}{xz}$ que es a variables separables. $\leftarrow$ [0,5 pts]. Resolviendo $\int zdz = -\int(1/x)dx + C$ se obtiene primero $z = \sqrt{2C - 2\ln(x)}$ y finalmente deshaciendo el cambio de variables que $y = x\sqrt{2C - 2\ln(x)}$ donde C es una constante real tal que $C \geq \ln(x)$. $\leftarrow$ [0,5 pts].

b) (2 ptos) $y' = \dfrac{x+y}{x+y+1}$. **Ind.:** Considere el cambio de variables $z(x) = x + y(x)$. Puede dejar la solución expresada en forma implícita.

Solución

Haciendo el cambio de variables sugerido $y = x + z$ y dado que $y' = z' - 1$ queda:

$$z' - 1 = \frac{z}{1+z}.$$

Reagrupando queda:

$$z' = \frac{1+2z}{1+z} \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

que es una EDO a variables separables $\leftarrow$ [0,5 pts]. Resolviendo:

$$\int \frac{1+z}{1+2z}dz = \int \left(1 - \frac{z}{1+2z}\right) dz = \int 1dx + C$$

donde C es una constante real arbitraria y de esta forma se obtiene

$$\frac{1}{2}(z + \frac{1}{2}\ln|1+2z|) = x + C$$

que es una familia de soluciones en forma implícita $\leftarrow$ [0,5 pts].
Si $1 + 2z = 0$ se obtiene la solución constante $z = -1/2$ que corresponde a la solución $y = z - x = -x - 1/2$. $\leftarrow$ [0,5 pts]

c) (2 ptos) $(y' - y^2)\cos(x) + y(2\cos^2(x) + \sin(x)) = \cos^3(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$.
Ind.: Verifique que una solución particular es $y_p = \cos(x)$ y considere el cambio

de variables $u = y - y_p$. Posteriormente, considere el cambio de variable $z = 1/u$. Asimismo, recuerde también que una primitiva de $\tan(x)$ está dada por $-\ln[\cos(x)]$ para $x \in (-\pi, \pi)$.

Solución

Verifiquemos que $y_p = \cos(x)$ es solución: queda

$$(-\sin(x) - \cos^2(x))\cos(x) + \cos(x)(2\cos^2(x) + \sin(x)) =$$
$$-\sin(x)\cos(x) - \cos^3(x) + 2\cos^3(x) + \sin(x)\cos(x) = \cos^3(x) \leftarrow [0{,}25 \text{ pts}]$$

Aquí hay dos formas de resolver:

- Una forma es despejando y' queda

$$y' + y\frac{2\cos^2(x) + \sin(x)}{\cos(x)} = \cos^2(x) + y^2$$

  que se reconoce como una EDO de tipo Riccati ← [0,25 pts] por lo que se puede usar el cambio de variables $y = y_p + 1/z$ ← [0,25 pts] que es el mismo que se sugiere en el enunciado. Reemplazando en la EDO queda:

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{2\cos^2(x) + \sin(x)}{\cos(x)} = 2\frac{\cos(x)}{z} + \frac{1}{z^2}$$

  y multiplicando por $-z^2$, juntando los términos en z y simplificando se obtiene la EDO lineal:

$$z' - \tan(x)z = -1 \leftarrow [0{,}5 \text{ pts}]$$

- La otra forma es haciendo el primer cambio de variables propuesto $u = y - y_p = y - \cos(x)$ es decir $y = u + \cos(x)$ y reemplazando en la EDO original se obtiene:

$$(u' - \sin(x) - (u + \cos(x))^2)\cos(x) + (u + \cos(x))(2\cos^2(x) + \sin(x)) = \cos^3(x)$$

  de donde usando que $\cos(x)$ es solución se simplifica a:

$$(u' - u^2 - 2u\cos(x))\cos(x) + u(2\cos^2(x) + \sin(x)) = 0 \leftarrow [0{,}25 \text{ pts}]$$

  esto es (EDO de Bernoulli):

$$u'\cos(x) + u\sin(x) = u^2\cos(x) \leftarrow [0{,}25 \text{ pts}]$$

  y realizando el segundo cambio de variables propuesto $z = 1/u$ encontramos la misma EDO lineal:

$$z' - \tan(x)z = -1 \leftarrow [0{,}5 \text{ pts}]$$

Un factor integrante de la EDO lineal es:

$$\exp\left(-\int \tan(x)dx\right) = \exp(\ln(\cos(x))) = \cos(x) \leftarrow [0{,}25 \text{ pts}]$$

y resolviendo de esta forma se obtiene:

$$z = \tan(x) + \frac{C}{\cos(x)} \leftarrow \text{[0,25 pts]}$$

donde C es una constante real arbitraria, y así deshaciendo los cambios:

$$y = y_p + 1/z = \cos(x) + \frac{1}{\tan(x) + \frac{C}{\cos(x)}} \leftarrow \text{[0,25 pts]}.$$

P2. *a*) (3 ptos) Determine la solución de $y' = f(y)$ con $y(0) = 1$. La función f está dada por: $f(y) = y^3$ si $y > 1$, $f(y) = y^2$ para $y \leq 1$. Indique el intervalo de existencia de la solución.

Solución

- Resolvemos primero $y' = y^3$ usando separación de variables lo que nos entrega la familia de soluciones:

$$y = \frac{1}{\sqrt{-2(x+C)}} \leftarrow \text{[0,5 pts]}.$$

Evaluando la constante arbitraria con la condición inicial $y(0) = 1$ se obtiene $C = -1/2 \leftarrow$ [0,25 pts] por lo que:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \leftarrow \text{[0,25 pts]}.$$

Ahora imponemos que $y > 1$, esto es $\sqrt{1-2x} < 1$ y despejando hallamos $x > 0$. Por otro lado la solución y se indefine para $x = 1/2$ de modo que la primera rama de la solución es válida en el intervalo:

$$0 \leq x < 1/2 \leftarrow \text{[0,25 pts]}.$$

- Resolvemos ahora $y' = y^2$ usando separación de variables lo que nos entrega la familia de soluciones:

$$y = -\frac{1}{x+C} \leftarrow \text{[0,5 pts]}.$$

Evaluando la constante arbitraria con la condición inicial $y(0) = 1$ se obtiene $C = -1 \leftarrow$ [0,25 pts] por lo que:

$$y = \frac{1}{1-x} \leftarrow \text{[0,25 pts]}.$$

Ahora imponemos que $y \leq 1$, esto es $1 - x \geq 1$ y despejando hallamos $x \leq 0$. La solución y se indefine esta vez para $x = 1$ pero esto está fuera del intervalo $x \leq 0$, de modo que la segunda rama de la solución es válida en el intervalo:

$$x \leq 0 \leftarrow \text{[0,25 pts]}.$$

Reuniendo las dos ramas se obtiene $\leftarrow$ [0,25 pts]

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ y = \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

en el intervalo de existencia:

$$x \leq 1/2 \leftarrow \text{[0,25 pts]}.$$

b) (3 ptos) Suponga que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución del problema de Cauchy o de valor inicial siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \cos^3(y) \operatorname{sen}(2t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Demuestre que $y(t) = y(-t)$ para $t \in \mathbb{R}$, es decir, que y es una función par.
Ind.: No resuelva la ecuación sino que use el hecho de que por el teorema de existencia y unicidad la solución del problema de valor inicial es única. No olvide verificar las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Recuerde la identidad $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Solución

Primera parte: verificamos las hipótesis del TEU global en este caso. La EDO es de la forma $y' = F(t, y)$ donde

$$F(t, y) = \cos^3(y) \sin(2t).$$

Claramente F es continua con respecto a t pues la función $\sin(2t)$ lo es en todo $\mathbb{R}$. $\leftarrow$ [0,5 pts]. F es también globalmente Lipschitz con respecto a y pues la función $\cos^3(y)$ lo es en todo $\mathbb{R}$. Esto se puede ver de al menos dos maneras diferentes. Una es argumentar simplemente que el valor absoluto de la derivada de F con respecto a y está acotada por $L = 3$ (este argumento se basa en en TVM ver comentarios). La otra forma es usar la identidad propuesta $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ y acotar:

$$\begin{aligned} |(\cos^3(y) - \cos^3(z)) \sin(2t)| &\leq |\cos(y) - \cos(z)||\cos^2(y) + \cos(y)\cos(z) + \cos^2(z)| \\ &\leq 3|\cos(y) - \cos(z)| \end{aligned}$$

$\leftarrow$ [1 pto]. Segunda parte: En lo que sigue pueden haber al menos dos formas diferentes:

- Definir $u(t) = y(-t)$ y verificar que por regla de la cadena:

  $$u'(t) = y'(-t) = \cos^3(y) \sin(-2t) = \cos^3(y) \sin(2t) \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

  por la paridad de la función seno. Por otro lado

  $$u(0) = y(-0) = 0 \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

  de modo que la función u satisface el mismo problema de valor inicial que la función y y por el teorema de existencia y unicidad se obtiene que $u(t) = y(-t)$ e $y(t)$ son iguales para todo $t \in \mathbb{R}$. $\leftarrow$ [0,5 pts]

- Definir $z(t) = y(t) - y(-t)$. Derivando por regla de la cadena se obtiene:

  $$z'(t) = y'(t) + y'(-t) = \cos^3(y) \sin(2t) + \cos^3(y) \sin(-2t) = 0 \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

  por la paridad de la función seno y además

  $$z(0) = y(0) - y(-0) = 0 \leftarrow \text{[0,5 pts]}$$

  como la solución $z = 0$ para $t \in \mathbb{R}$ es la única solución de la EDO $z' = 0$ con condición inicial $z(0) = 0$ se obtiene de nuevo por el teorema de existencia y unicidad que $y(t) = y(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. $\leftarrow$ [0,5 pts]

P3. La siguiente ecuación se usa para modelar el comportamiento de una población afecta a cambios estacionales:

$$N' = a(t)N, \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

La función a representa la tasa neta de crecimiento (cuando $a(t) > 0$) o decrecimiento (cuando $a(t) < 0$) per cápita. La función a es continua y tiene período $T > 0$, es decir $a(s + T) = a(s)$ para $s \geq 0$, dando cuenta de los cambios estacionales que afectan a la población.

a) (1.5 ptos) Demuestre que la solución general de la ecuación (1) está dada por:

$$N(t) = N(0)\exp\left(\bar{a}t + \mu(t)\right),$$

donde $\bar{a} := \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\, ds$ es el promedio temporal de la tasa a y $\mu(t) := \int_0^t (a(s) - \bar{a})\, ds$.

Solución

Para resolver $N' = a(t)N(t)$ y llegar a la expresión pedida hay varias formas. Se puede escribir como $N'/N = a(t)$ e integrar entre 0 y t o escribir como $N' - a(t)N = 0$ y usar el factor integrante $\exp(-\int_0^t a(s)ds)$. También se pueden hacer ambos métodos con integrales indefinidas evaluando la constante.

- Una opción es hacer

$$\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)} ds = \int_0^t a(s)ds$$

e integrando

$$\ln\left|\frac{N(t)}{N(0)}\right| = \int_0^t a(s)ds$$

de donde

$$\left|\frac{N(t)}{N(0)}\right| = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$$

y como $N(t)$ y $N(0)$ deben tener el mismo signo (porque el lado derecho es siempre positivo) se puede sacar el valor absoluto y se obtiene el resultado:

$$N(t) = N(0)\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) \leftarrow [1 \text{ pto}].$$

Después hay $\leftarrow$ [0.2 ptos] asignados por notar que el caso $N(0) = 0$ sigue siendo válida la expresión anterior pues si $N(0) = 0$ la solución $N(t)$ sería nula (esto es por TEU y unicidad por ser una EDO lineal con $a(t)$ continua y la única solución es este caso es la idénticamente nula).

- Otra opción es multiplicar $N' - a(t)N = 0$ por el factor integrante $\exp(-\int_0^t a(s)ds)$ se obtiene

$$\left(N\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right)\right)' = 0$$

de donde integrando entre 0 y t se obtiene

$$N(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) - N(0) = 0$$

esto es:

$$N(t) = N(0)\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$$

$\leftarrow$ [1.2 ptos]. Con este método no es necesario suponer que $N(0)$ no se anula.

- Se pueden ocupar las dos formas anteriores utilizando integrales indefinidas y en ese caso aparece una constante arbitraria C después de integrar, la que puede expresarse en términos de $N(0)$. A esas formas de obtener la solución también se les asigna puntaje similar a como se asignó en los casos anteriores.

Finalmente, usando que

$$a(s) = \bar{a} + a(s) - \bar{a}$$

integrando entre 0 y t (notar que $\bar{a}$ es constante) se deduce que

$$\int_0^t a(s)ds = \bar{a}\,t + \underbrace{\int_0^t (a(s)-\bar{a})ds}_{\mu(t)}$$

y así:

$$N(t) = N(0)\exp\left(\bar{a}t + \mu(t)\right). \leftarrow \text{[0.3 ptos]}$$

b) (1.5 pto) Demuestre que $\mu(t)$ es periódica de periodo T. Concluya que si $\bar{a} = 0$ entonces todas las soluciones de la ecuación (1) son periódicas.
Ind.: Note que $\int_0^{t+T}(a(s)-\bar{a})\,ds = \int_0^T(a(s)-\bar{a})\,ds + \int_T^{t+T}(a(s)-\bar{a})\,ds$.

Solución

Probemos que $\mu(t)$ es periódica de periodo T. Para ello debemos probar que

$$\mu(t+T) = \mu(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Veamos:

$$\mu(T+t) = \int_0^{t+T}(a(s)-\bar{a})ds = \int_0^T (a(s)-\bar{a})ds + \int_T^{t+T}(a(s)-\bar{a})ds$$

$\leftarrow$ [0,2 ptos]. Notamos que

$$\int_0^T (a(s)-\bar{a})ds = \int_0^T a(s)ds - \bar{a}T = \int_0^T a(s)ds - \frac{1}{T}\int_0^T a(s)ds\,T = 0$$

$\leftarrow$ [0,2 ptos] y por otro lado haciendo el cambio de variables $s = u + T$ (*) y usando que a es periódica de periodo T (**) tenemos que:

$$\int_T^{t+T} (a(s) - \bar{a})ds \stackrel{(*)}{=} \int_0^t (a(u+T) - \bar{a})du \stackrel{(**)}{=} \int_0^t (a(u) - \bar{a})du$$

$\leftarrow$ [0,4 ptos]. Y de este modo:

$$\mu(t+T) = 0 + \int_0^t (a(u) - \bar{a})du = \mu(t), \quad \forall t \geq 0. \leftarrow \text{[0,2 ptos]}$$

Si $\bar{a} = 0$ de la expresión para la solución obtenida en la parte anterior:

$$N(t) = N(0)\exp(\mu(t))$$

y como μ es periódica de periodo T, lo mismo se cumple para la solución $N(t)$ pues $\exp(\mu(t+T)) = \exp(\mu(t))$, $\forall t \geq 0$ $\leftarrow$ [0,5 ptos].

c) (1.5 pto) Muestre que todas las soluciones de la ecuación (1) convergen a 0 cuando $t \to \infty$ si $\bar{a} < 0$.

Solución

Escribimos entonces

$$N(t) = N(0)\exp(\bar{a}\,t + \mu(t)) = N(0)\exp(\bar{a}\,t) \cdot \exp(\mu(t))$$

$\leftarrow$ [0,2 ptos]. Por un lado $\exp(\mu(t))$ es continua y periódica por lo tanto acotada para $t \geq 0$. $\leftarrow$ [0,3 ptos]. Por otro lado $\bar{a} < 0$ por lo que

$$\exp(\bar{a}\,t) \to 0, \quad \text{si } t \to +\infty \leftarrow \text{[0,5 ptos]}$$

Por lo tanto:

$$N(t) = N(0)\underbrace{\exp(\bar{a}\,t)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\exp(\mu(t))}_{\text{acotado}} \to 0, \quad \text{si } t \to +\infty \leftarrow \text{[0,5 ptos]}$$

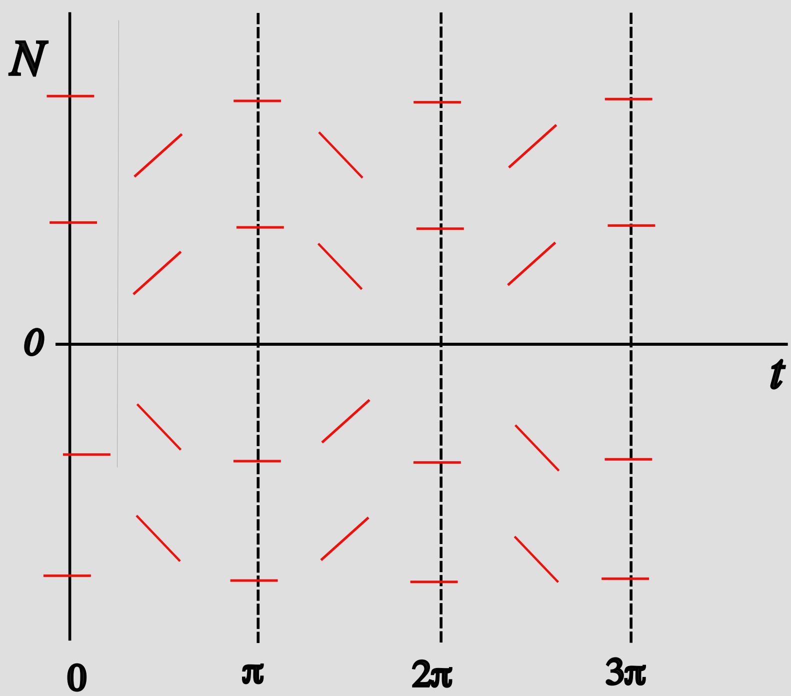
d) (1.5 ptos) Bosqueje el diagrama de pendientes correspondiente a la ecuación

$$N' = \operatorname{sen}(t)\,N, \quad t \geq 0$$

en la región que se indica en el plano de la **hoja adjunta**. Comente en la misma hoja: ¿cómo se comportan las soluciones en este caso?

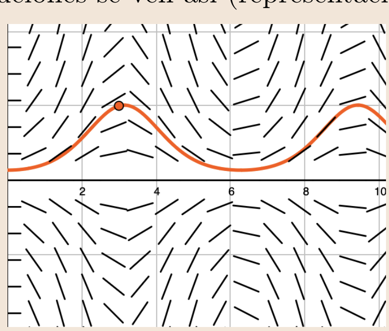
Solución

- Pendientes horizontales para las verticales $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ $\leftarrow$ [0,3 ptos].
- Pendientes crecientes si $N > 0$ y decrecientes si $N < 0$ para $t \in (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi)$ $\leftarrow$ [0,5 ptos].
- Pendientes decrecientes si $N > 0$ y crecientes si $N < 0$ para $t \in (\pi, 2\pi)$ $\leftarrow$ [0,3 ptos].

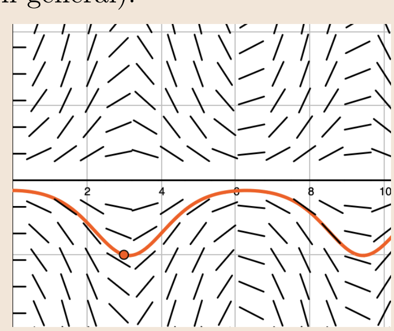


Como $\int_0^{2\pi} \sin(t)dt = 0$ que es el caso $\bar{a} = 0$ del problema, quiere decir que todas las soluciones $N(t)$ son periódicas de periodo 2π. $\leftarrow$ [0,4 ptos].

Las soluciones se ven así (representación general):



solución periódica positiva



solución periódica negativa