Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2024-1, Coordinado.
Miércoles 3 de Abril

PAUTA CONTROL 1

P1. *a*) Considere la ecuación diferencial

$$y' + \frac{y}{x^2} = \frac{y\ln(|y|)}{x}. \tag{1}$$

1) (1,5 pts.) Sea y una solución de (1) definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $y(x) \neq 0$, $x \in I$. Demuestre que $z(x) = \ln(|y(x)|)$ satisface la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2} \tag{2}$$

Solución

Trabajando en $I \Rightarrow z$ es derivable, luego $z' = \frac{1}{|y|}\frac{y}{|y|}y' = \frac{y'}{y}$ ← [0,5 pts]. Ahora dividiendo (1) por y (en I) se tiene que

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{x^2} = \frac{\ln(|y|)}{x} \Leftrightarrow z' + \frac{1}{x^2} = \frac{z}{x} \Leftrightarrow \boxed{z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2}} \checkmark \ \leftarrow \text{[1 pto].}$$

Comentarios para corrección

Si no se menciona porque z es derivable en I o que funcionan los cálculos (por ej. al dividir por $y \neq 0$ en I), descontar [0,1 pto].

2) (2,5 pts.) Use la parte anterior para determinar la solución de la ecuación (1) con $y(1) = -1$. Determine el intervalo más grande donde esa solución está definida.

Solución

Notamos que (2) es una EDO lineal de 1er orden para z $\leftarrow$ [0,1 pto], cuyo factor integrante es $\phi(x) = e^{-\int 1/x} = 1/|x|, x \neq 0$ $\leftarrow$ [0,5 pts]. Luego la solución general está dada por

$$z(x) = |x|\left(-\int \frac{1}{x^2|x|} + A\right), x \in I \leftarrow \text{[0,5 pts], ahora notamos que}$$
$$z(1) = \ln(|y(1)|) = \ln(|-1|) = 0 \leftarrow \text{[0,2 pts].}$$

Como la condición está dada en $x = 1$ tomamos $I =]0, \infty[$, en tal caso $z(x) = x\left(\frac{1}{2x^2} + A\right)$ $\leftarrow$ [0,5 pts], como $z(1) = 0 \Rightarrow A = -1/2$ $\leftarrow$ [0,2 pts], con ello se llega a

$$\ln(|y|) = x\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow |y| = e^{x\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow y = \pm e^{x\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}\right)} \leftarrow \text{[0,3 pts].}$$

Finalmente como $y(1) = -1$ nos quedamos con $\boxed{y(x) = -e^{x\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}\right)}}$, definida como solución en $]0, \infty[$ (más grande) ✓ $\leftarrow$ [0,2 pts].

Comentarios para corrección

Si se trabaja directamente con $x > 0$, tanto para el factor integrante y consecuente con la solución general de (2) descontar como máximo [0,5 pts], de no lograr discriminar la solución desde $y = \pm \ldots$.

b) (2 pts.) Determine al menos tres soluciones del problema de valor inicial

$$y' = y^{\frac{1}{3}}, \text{ con } y(0) = 0. \tag{3}$$

Solución

Para resolver $y' = y^{1/3}$, suponemos $y(t) > 0$, se trata de variables separables. Luego integrando $\int \frac{dy}{y^{1/3}} = t + C$ resulta $y(t) = \big(2/3(t + C)\big)^{3/2}$ $\leftarrow$ [0,7 pts]. Notemos que expresión es > 0 para $t + C > 0 \Leftrightarrow t > -C$ y toma el valor 0 para $t = -C$ (notando que $-C$ puede ser ≥ 0 o < 0). Por ejemplo tomando $C = 0$, obtenemos la solución $y(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ para $t > 0$ y como $3/2 > 1$, $y(t)$ es diferenciable en $t = 0$ $\leftarrow$ [0,3 pts]. Así la función $y(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ es diferenciable y satisface la ecuación con condición inicial $\leftarrow$ [0,5 pts]. Por otra parte, si tomamos $C = -1$ obtenemos $y(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}(t-1)\right)^{3/2} & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$, tambíen es solución pues en $t = 1$ $y(t)$ es diferenciable y cumple $y(0) = 0$ $\leftarrow$ [0,3 pts]. Además $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ es una tercera solución $\leftarrow$ [0,2 pts] ✓.

Comentarios para corrección

Otra posible respuesta es plantear $y(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}(t+C)\right)^{3/2} & \text{si } t > -C \\ 0 & \text{si } t \leq -C \end{cases}$, decir que es diferenciable y que tomando $C \leq 0$ obtenemos infinitas soluciones. Esto también tiene puntaje completo $\checkmark$.

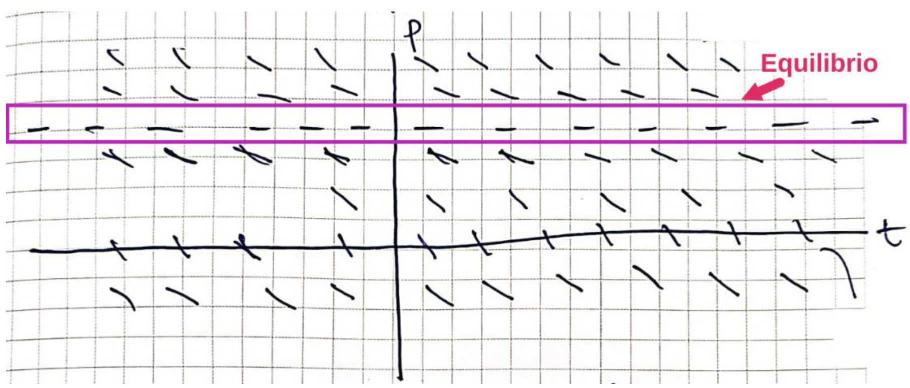
P2. La siguiente ecuación diferencial se utiliza para modelar la densidad de una población de peces, considerando que son capturados con una tasa de pesca constante

$$\frac{dP}{dt} = P(1-P) - \frac{1}{4}, \tag{4}$$

a) (1,5 pts.) Bosqueje el diagrama de pendientes asociado a la ecuación (4) con $P,\ t \in \mathbb{R}$.
Ind. Le será útil estudiar el signo de la función $P(1-P) - \frac{1}{4}$.

Solución

Notando que $P(1-P) = -(P^2 - P + 1/4) = -(P-1/2)^2$ ← [0,3 pts], se sigue que $\frac{dP}{dt} = 0$ para $P = 1/2$ ← [0,2 pts]. De lo anterior podemos bosquejar el diagrama de pendientes



Continuación

En el bosquejo por marcar equilibrio ← [0,3 pts] y ← [0,7 pts] por el resto.

Comentarios para corrección

Si la dirección de las pendientes es incorrecta en cualquier región bajar [0,5 pts].

b) (1,5 pts.) Sea P una solución de (4), con condición inicial $P(0) \geq 0$. A partir del diagrama conjeture si la población se extingue, es decir $P(T) = 0$ para algún T, o sobrevive, es decir $P(t) > 0$ para todo t.
Ind. Distinga los casos $P(0) > \frac{1}{2}$, $P(0) = \frac{1}{2}$, $0 < P(0) < \frac{1}{2}$.

Solución

A partir del diagrama si $P(0) < 1/2$ la población se extingue y si $P(0) \geq 1/2$ la población sobrevive con $\lim_{t\to\infty} P(t) = 1/2$ ✓.

Comentarios para corrección

Asignar [0,3 pts] por el bosquejo correcto de cada tipo de solución ([0,9 pts] en total) y luego otorgar ← [0,6 pts] por expresar correctamente la respuesta.

c) (1,5 pts.) Determine todas las soluciones (expresiones matemáticas) de la ecuación (4), explicitando el mayor intervalo donde están definidas.

Solución

Desde la parte a) $\frac{dP}{dt} = -(P-1/2)^2$, suponiendo $P(t_0) \neq 1/2$ ← [0,1 pto], separando variables e integrando se llega a $\int_{t_0}^{t} \frac{dp}{(P-1/2)^2} = -(t-t_0)$ de donde se obtiene $\boxed{P(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(P(t_0)-1/2)^{-1} + t - t_0}}$ ← [0,6 pts]. Notar que la última expresión se indefine para $\bar{t} = t_0 - (P(t_0) - 1/2)^{-1}$ ← [0,2 pts]. Ahora si $P(t_0) > 1/2$ entonces $(P(t_0) - 1/2)^{-1} > 0$, $\bar{t} < t_0$ y la solución queda definida en $]\bar{t}, \infty[$ ← [0,2 pts]. Ahora si $P(t_0) < 1/2$ entonces $(P(t_0)-1/2)^{-1} < 0$, $\bar{t} > t_0$ y la solución queda definida en $]-\infty, \bar{t}[$ ← [0,2 pts]. Finalmente si $P(t_0) = 1/2$ la solución es $P(t) = 1/2$ (constante) definida en todo $\mathbb{R}$ ← [0,2 pts].

d) (1,5 pts.) Para $P(0) \geq \frac{1}{2}$, determine $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

Solución

Cuando $P(t_0) = 1/2$ entonces $P(t) = 1/2$ es solución constante y claramente $\lim_{t\to\infty} P(t) = 1/2$ ← [0,5 pts]. Cuando $P(t_0) > 1/2$ la solución está definida en $]\bar{t}, \infty[$ y luego $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(P(t_0)-1/2)^{-1}+t-t_0} = 1/2$ ← [1 pto] ✓,

P3. *a*) (3,5 pts.) Use la sustitución $z = x^2 + y^2$, para resolver el problema

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}, \quad y(0) = 1.$$

Solución

Procediendo como se indica $z' = 2x + 2yy' \Rightarrow 2yy' = z' - 2x \leftarrow$ [0,5 pts], reemplazando en la EDO se llega a $z' = 2\sqrt{z}$, que es una EDO a variables separables $\leftarrow$ [0,5 pts]. Notamos que $z \neq 0$, sino $y \equiv 0$ para todo x lo cual no es compatible con $y(1) = 1 \leftarrow$ [0,3 pts]. Además $z(0) = y^2(0) + 0^2 = 1^2 = 1 \leftarrow$ [0,5 pts], luego separando variables se llega a $\sqrt{z} = x + C$ con $C = 1 \leftarrow$ [0,5 pts], (pues $c(0) = 1$), esto implica que

$$z(x) = (x+1)^2 \Rightarrow y^2(x) = (x+1)^2 - x^2 \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{2x+1} \leftarrow \text{[1 pto].}$$

Tomamos el signo $+$ que es compatible con $y(0) = 1$, luego nos quedamos con $\boxed{y(x) = \sqrt{2x+1}}$ ✓ definida en $[-1/2, \infty[$ $\leftarrow$ [0,2 pts].

Comentarios para corrección

Si no trabaja o no se logra discriminar el signo $\pm$ en el procedimiento descontar a lo sumo $\leftarrow$ [0,5 pts], dependiendo del desarrollo que se presente.

b) (2,5 pts.) Encuentre la solución del problema con condición inicial

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1, \quad y(0) = 1.$$

Ind. Piense en un cambio de variables adecuado.

Solución

Notando que la EDO propuesta equivale a $y' = (y-x)^2 + 1$, consideremos el cambio de variable $u = y - x \leftarrow$ [0,5 pts]. Tal cambio nos conduce a la EDO de variables separables $u' = u^2 \leftarrow$ [0,5 pts]. Notar que $u \equiv 0$ no es solución, pues $u = 0$ equivale a $y(x) = x$ lo cual no es compatible con $y(0) = 1 \leftarrow$ [0,2 pts].

Resolviendo separando variables queda $-1/u = x + C$ y como $y(0) = 1$ implica $u(0) = 1$ luego $C = -1$. De lo anterior se llega a $u(x) = \frac{1}{1-x} \leftarrow$ [1 pto]. Como $u(x) = y(x) - x$ se obtiene que $\boxed{y(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x}}$, $x \neq 1$ ✓ $\leftarrow$ [0,3 pts]. Cabe señalar que tal solución está definida como tal en $]-\infty, 1[$. compatible con la condición dada en $x = 0$ del problema.

Comentarios para corrección

Notando que la EDO también es equivalente a $y' = (x-y)^2 + 1$, otro cambio de variable es $v = x - y$ lo cual conduce a $v' = -v^2$, procediendo como arriba se llega a $\boxed{y(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}}$, $x \neq 1$, lo cual coincide con lo hecho para u, por ende se debe corregir de manera idéntica haciendo los ajustes respectivos para este cambio v.

Solución alternativa

Se puede observar que la EDO es tipo Ricatti, se tiene que $x \mapsto y_p(x) = x$ es una solución particular $\leftarrow$ [0,5 pts]. Luego el cambio $y = x + 1/z$ $\leftarrow$ [0,2 pts], conduce a la siguiente EDO lineal para z : $\boxed{z' = -1}$ $\leftarrow$ [0,3 pts], luego por integración directa se llega a $z(x) = -x + C$ $\leftarrow$ [0,5 pts], usando esto en el cambio $y = x + 1/z$ conduce a $y(x) = \frac{1+xC-x^2}{-x+C}$ $\leftarrow$ [0,5 pts], como $y(0) = 1$ se tiene $C = 1$ $\leftarrow$ [0,3 pts] y la solución rambién resulta ser $\boxed{y(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x}}$ $\leftarrow$ [0,1 pto], $x \neq 1$ $\leftarrow$ [0,1 pto].